

بسم الله الرحمن الرحيم
اللهم صل على محمد و آل محمد



WWW.EGZA.TK

نام درس: جبر خطی

رشته تحصیلی: گرایش: ریاضی

کد درس: ۲۳۱۱۳۲ تاریخ: ۸۶/۳/۲۱ شروع: ۸

تعداد سوال: نهی ۲۰ تکمیلی -- تشریحی ۵

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه

تعداد کل صفحات: ۳

WWW.EGZA.TK

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست:

۱. کدامیک از مجموعه های زیر، زیر فضای $mat_{n \times n}(R)$ نیست؟

ب. مجموعه ماتریس های متقارن $n \times n$

الف. مجموعه ماتریس های قطری $n \times n$

د. مجموعه ماتریس های بالا مثلثی $n \times n$

ج. مجموعه ماتریس های هرمیتی $n \times n$

۲. کدام مجموعه در فضای برداری توابع وابسته خطی است؟

ب. $\{x, \sin x, \cos x\}$

الف. $\{1, x, x^2\}$

د. $\{1, 2+x, 3+x^2\}$

ج. $\{2, \sin^2 x, \cos^2 x\}$

۳. کدام مجموعه در R^3 وابسته خطی است؟

ب. $\{(1, 3, 5), (2, 4, 6)\}$

الف. $\{(1, 2, 3)\}$

د. $\{(1, 2, 3), (3, 2, 1), (5, 6, 7)\}$

ج. $\{(1, 2, 3), (2, 4, 8), (3, 6, 12)\}$

۴. کدام نگاشت خطی است؟

ب. $f: R \rightarrow R^2$

الف. $f: R \rightarrow R$

$f(x) = (2x, 5)$

$f(x) = 2x + 5$

$f(x): R \rightarrow R^2$

$f: R \rightarrow R^2$

$$f(x) = (2x, 5x)$$

$$f(x) = (2x, x^5)$$

۵. در کدام حالت از یک بیک بودن $f: V \rightarrow W$ می توان پوشا بودن را نتیجه گرفت.

الف. $\ker f = V$ ب. $\text{Im } f = \{0_W\}$ ج. $\dim V = \dim W$ د. $\ker f = \{0_V\}$

۶. کدام گزاره نادرست است.

الف. ویژه بردارهای نظیر ویژه مقدار متمایز وابسته خطی اند.

ب. ویژه بردارهای غیرصفر نظیر ویژه مقدارهای متمایز مستقل خطی اند.

ج. هر ماتریس $n \times n$ دارای n ویژه بردار مستقل خطی قطری شدنی است.

د. هرگاه بردارهای ویژه A تشکیل پایه‌ای برای V بدهند A قطری شدنی است.

۷. کدام گزاره درست است؟

الف. $A \in \text{Mat}_{n \times n}(R)$ منفرد است اگر و فقط اگر تمام مقادیر ویژه آن صفر باشد.

ب. $A \in \text{Mat}_{n \times n}(R)$ منفرد است اگر و فقط اگر تمام ویژه مقدارهای آن غیرصفر باشد.

ج. $A \in \text{Mat}_{n \times n}(R)$ منفرد است اگر و فقط اگر حداقل یکی از ویژه مقدارهای آن صفر باشد.

د. $A \in \text{Mat}_{n \times n}(R)$ منفرد است اگر و فقط اگر یکی از ویژه مقدارهای آن غیر صفر باشد.

۸. در مورد مجموعه های یکا متعامد کدام گزاره درست است؟

الف. هر مجموعه مستقل خطی یکا متعامد است ب. هر مجموعه یکا متعامد مستقل خطی است

ج. هر مجموعه مستقل خطی متعامد است د. هر مجموعه متعامد یکا متعامد است



نام درس: جبر خطی

رشته تحصیلی: گرایش ریاضی

کد درس: ۲۳۱۱۳۳

تعداد سؤالات: نهمی ۲۰ تکمیلی ۵ تفریحی ۵

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۶۰ دقیقه تفریحی ۶۰ دقیقه

تعداد کل صفحات: ۳

۹. هرگاه V یک فضای برداری ضرب داخلی از بعد n باشد آنگاه:

الف. هر پایه V یکا متعامد است. ب. هر زیر مجموعه یکامد از V پایه V است.

ج. هر زیر مجموعه n عضوی یکا متعامد پایه V است. د. هر زیر مجموعه مستقل خطی از V یکا متعامد است.
۱۰. در مورد مکمل متعامد یک زیر فضا کدام رابطه نادرست است؟

الف. $W^{\perp\perp} = W$ ب. $(A \cap B)^{\perp} = A^{\perp} \cap B^{\perp}$

ج. $(A \cup B)^{\perp} = A^{\perp} + B^{\perp}$ د. $A \subseteq B \Rightarrow B^{\perp} \subseteq A^{\perp}$

۱۱. اگر $\chi_A(n)$ چند جمله ای ویژه و $m_A(n)$ چند جمله ای می نیم A باشد کدام گزاره نادرست است؟

الف. $\chi_A(A) = 0$ ب. $m_A(A) = 0$ ج. $\chi_A(n) | m_A(n)$ د. $m_A(n) | \chi_A(n)$

۱۲. کدام گزینه در مورد $\chi_A(x)$ و $m_A(x)$ درست است؟

الف. صفرهای $\chi_A(x)$ از صفرهای $m_A(x)$ بیشتر است

ب. صفرهای $m_A(x)$ از صفرهای $\chi_A(x)$ بیشتر است

ج. درجه $\chi_A(x)$ همواره از درجه $m_A(x)$ بیشتر است

د. درجه $m_A(x)$ از درجه $\chi_A(x)$ نا بیشتر است

۱۳. ماتریس A در چه صورت وارون پذیر است؟

الف. اگر در چند جمله ای ویژه خود صدق کند. ب. اگر در چند جمله ای می نیم خود صدق کند.

ج. اگر جمله ثابت چند جمله ای ویژه آن صفر باشد. د. اگر جمله ثابت چند جمله ای ویژه آن صفر نباشد.

۱۴. اگر $A = \{(x, 0) | x \in R\}$ و $B = \{(0, y) | y \in R\}$ ، $C = \{(x, x) | x \in R\}$ آنگاه کدام گزینه نادرست است؟

الف. $A \oplus B = R^2$ ب. $A \oplus C = R^2$ ج. $B \oplus C = R^2$ د. هیچکدام

۱۵. کدام گزینه درست است؟

الف. هر نگاشت خطی یکی تصویر است. ب. هر نگاشت خطی، خود توان است.

ج. هر نگاشت خودتوان پوچتوان است. د. هر نگاشت خطی تصویر است اگر و فقط اگر خود توان باشد.

۱۶. هرگاه f, g, h نگاشتهای خطی باشند که $f + g$ ، fog قابل تعریف باشند آنگاه کدام گزاره درست است؟

الف. $(\lambda f)^* = \lambda f^*$ ب. $(\lambda f)^* = \bar{\lambda} f^*$

ج. $(hof)^* = h^* of^*$ د. $(g^*)^* = g^*$

۱۷. اگر گزینه های زیر نشان دهنده چند جمله ای می نیم A باشد، در چه حالتی A قطری شدنی است؟

الف. $m_A(n) = (n-1)^r (n-2)^r$ ب. $m_A(n) = (n-1)^r$

ج. $m_A(n) = (n-1)(n-2)(n-3)$ د. $m_A(n) = (n-1)(n-2)^r$

WWW.EGZA.TK



نام درس: جبر خطی

تعداد سؤالات: فنی ۲۰ تکمیلی -- نظری ۵

رشته تحصیلی: گرایش ریاضی

زمان امتحان: تئوری و تکمیلی ۶۰ دقیقه نظری ۶۰ دقیقه

کلاس: ۲۴۱۳۳

تعداد کل صفحات: ۳

WWW.EGZA.TK

۱۸. اگر B, A قطری شدنی باشند درجه صورت همزمان قطری شدنی اند؟الف. هرگاه $\det A = \det B$ ب. هرگاه $AB = BA$ ج. هرگاه $AB \neq BA$ د. هرگاه $m_A = m_B$ ۱۹. اگر $f, f: R^r \rightarrow R^r$ هر نقطه را به قرینه آن نسبت به محور x ها تبدیل کند آنگاه f کدام است؟الف. $x+1$ ب. $x-1$ ج. x^r+1 د. x^r-1 ۲۰. صورت متعارف فرم متقارن $x^2 - 2xy + 4yz - 2y^2 + 4z^2$ کدام است؟الف. $x^2 + 2y^2 - 2z^2$ ب. $x^2 - 2y^2 - z^2$ ج. $x^2 - 4y^2 + z^2$ د. $-x^2 - 24y^2 + 2z^2$

سئوالات تشریحی:

۱. فرض کنید V فضای برداری چند جمله‌ای‌های با درجه حداکثر n باشد و $W = \{f \in V \mid f(1) = 0\}$ الف. نشان دهید که W زیر فضای V است.ب. نشان دهید که $\dim W = n$ ۲. فرض کنید $T: V \rightarrow V$ یک تبدیل خطی در فضای برداری V باشد و عدد حقیقی مثبت k موجود باشد به طوری که $\|Tx\| \leq k \|x\|$ به ازای هر x برقرار باشد ثابت کنید T وارون پذیر است.۳. فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی باشد T را یک عملگر خطی روی V در نظر می‌گیریم در این صورتعملگر خطی منحصر به فرد T^* بر V وجود دارد بطوری که برای $u, v \in V$ داشته باشیم $\langle Tu, v \rangle = \langle u, T^*v \rangle$ ۴. نشان دهید صفرهای m_A ، χ_A یکسان اند.۵. اگر V یک فضای برداری متناهی بعد باشد آنگاه نگاشت $\alpha_V: V \rightarrow \hat{V}$ یکرختی است.

نام درس: جبر خطی
رشته تحصیلی: مگرایین ریاضی
کد درس: ۲۲۱۱۳۳

۸۶/۱۰/۱۶
۸۶۳۸

تعداد سؤالات: فنی ۲۰ تکمیلی - تفریحی ۵
زمان امتحان: تئوری و تکمیلی ۶۰ دقیقه تفریحی ۶۰ دقیقه
تعداد کل صفحات: ۲

۱- نمایش ماتریسی نگاشت خطی $F: R^3 \rightarrow R^3$ با ضابطه $F(x, y, z) = (3x + z, x - y + z, 2x - y)$ نسبت به پایه های مرتب استاندارد R^3 کدام است؟

ب. $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

الف. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

د. $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & -3 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

ج. $\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \end{bmatrix}$

WWW.EGZA.TK

۲- هرگاه V یک فضای برداری و $X, Y \subseteq V$ دو زیر مجموعه $\langle X \rangle, V$ نشان دهنده زیر فضای تولید شده توسط X باشد، آنگاه کدام گزینه نادرست است؟

ب. $X \subseteq Y \Rightarrow \langle X \rangle \subseteq \langle Y \rangle$

الف. $\langle X \rangle = \langle Y \rangle \Rightarrow X = Y$

د. $\langle X \rangle = \langle Y \rangle \Rightarrow \begin{cases} \langle X \rangle \subsetneq \langle Y \rangle \\ \langle Y \rangle \subsetneq \langle X \rangle \end{cases}$

ج. $\langle X \rangle \subseteq \langle Y \rangle \Rightarrow X \subseteq Y$

۳- کدام گزینه در مورد نگاشتهای خطی درست است؟

الف. هر نگاشت خطی $T: R \rightarrow R$ نگاشتی فرد است.

ب. هر نگاشت خطی $T: R \rightarrow R$ نگاشتی زوج است.

ج. هر نگاشت خطی $T: R \rightarrow R$ هم فرد و هم زوج است.

د. هر نگاشت خطی $T: R \rightarrow R$ نه زوج است نه فرد.

۴- کدام نگاشت خطی است؟

الف. $F: R^2 \rightarrow R^2, F(x, y) = xy$

ب. $F: R^2 \rightarrow R^2, F(x, y) = (x+1, 2y, x+y)$

ج. $F: R^2 \rightarrow R^2, F(x, y) = (|x|, 0)$

د. $F: R^3 \rightarrow R, F(x, y, z) = 2x - 3y + z$

۵- اگر $D: R_n[R] \rightarrow R_n[R]$ نگاشت مشتق گیری باشد، $\ker f$ کدام است؟

(توجه: فضای چندجمله ای های با ضرایب حقیقی از درجه حداکثر n است.)

الف. $R_n[R]$ ب. $R_{n-1}[R]$ ج. R د. R^n



نام درس: جبر خطی

رشته تحصیلی: مگرایان ریاضی

کلاس درس: ۳۳۱۱۳۳

WWW.EGZA.TK

تعداد سؤالات: نسی ۲۰ تکلیلی - تشریحی ۵

زمان امتحان: نسی و تکلیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه

تعداد کل صفحات: ۲

۶- نگاشت خطی $F: R^2 \rightarrow R^3$ را در نظر بگیرید $F(x, y) = (x + y, x - 2y, 3x + y)$ ماتریس F نسبت به پایه‌های مرتب $\{(1,1), (0,2)\}$ و $\{(1,1,0), (0,1,1), (1,1,1)\}$ کدام است؟

الف. $\begin{pmatrix} -5 & -6 \\ -3 & 6 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$ ب. $\begin{pmatrix} -5 & -6 \\ -3 & -6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ ج. $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ د. $\begin{pmatrix} -5 & -6 \\ -3 & -6 \\ -7 & -8 \end{pmatrix}$

۷- کدام گزینه در مورد ماتریس نمایشگر تابعهای خطی f, g روی فضای n بعدی V برقرار نیست؟
الف. $Mat(fog) = Mat(f)Mat(g)$ ب. $Mat(f + g) = Mat(f) + Mat(g)$

ج. $Mat(\lambda f) = \lambda Mat(f)$ د. $Mat(id_V) = I_n$

۸- اگر W, V فضاهای برداری روی F باشند در چه صورت F یک تابع نامیده می‌شود؟
الف. $f: V \rightarrow W$ ب. $f: V \rightarrow F$ ج. $f: F \rightarrow V$ د. $f: F \rightarrow W$

۹- اگر V یک فضای برداری با بعد متناهی و W یک زیر فضای آن باشد کدام گزاره نادرست است؟

الف. $V^\circ = \{0_V^d\}$ ب. $\{0_V\}^\circ = V^d$ ج. $W^{\circ\circ} = W$ د. $V^d = V^\circ$

۱۰- برای ماتریس مربعی A درجه صورت $\det A$ برابر صفر می‌گردد؟

الف. اگر A وارون پذیر نباشد. ب. اگر A مقارن باشد.

ج. اگر A وارون پذیر باشد. د. اگر A متعامد باشد.

۱۱- اگر V^{dd} دوگان مضاعف V باشد آنگاه داریم:

الف. $\dim V^{dd} = 2 \dim V^d$ ب. $\dim V^{dd} > \dim V^d$

ج. $\dim V^{dd} = (\dim V^d)^2$ د. $\dim V^{dd} = \dim V^d$

۱۲- هرگاه $f: V \rightarrow W$ یک تابع خطی باشد، در مورد f^t چه می‌توان گفت؟

الف. f^t همواره یکرختی است ب. $(f^t)^{-1} = f^{-1}$

ج. اگر f یکرختی باشد f^t نیز یکرختی است د. $(f^t)^{-1} = f^{tt}$

۱۳- هرگاه A ماتریسی باشد که هر بردار دلخواه بردار ویژه آن باشد در مورد A چه می‌توان گفت؟

الف. A مضربی از ماتریسی واحد است. ب. A ناصفر است.

ج. A ماتریس واحد است. د. A بالا مثلثی است.

۱۴- اگر داشته باشیم $\chi_A(x) = x^5 + x^2 - 1$ آنگاه A^{-1} کدام است؟

الف. $A^{-1} = A^2 + A$ ب. $A^{-1} = 3A^2 - 2A$

ج. $A^{-1} = A^2 + I$ د. $A^{-1} = -A^2 - A^2$



تعداد سوالات: فنی ۲۰ تکمیلی -- تشریحی ۵
 زمان امتحان: تئوری و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه
 تعداد کل صفحات: ۲

نام درس: جبر خطی
 رشته تحصیلی: گرافیک: ریاضی
 کلاس: ۳۳۱۱۲۳

WWW.EGZA.TK

۱۵- اگر U یک عملگر خطی باشد کدام شرط معادل بقیه گزینه ها نیست؟

الف. $U^* = U^{-1}$ ب. $\langle U(x), U(y) \rangle = \langle x, y \rangle$

ج. $\|U(x)\| = \|x\|$ د. $U^* = U$

۱۶- نامساوی بسل در چه صورت به تساوی تبدیل می شود؟

(نامساوی بسل: $(\sum | \langle x, e_k \rangle |^2) \leq \|x\|^2$)

ب. هرگاه X عضو فضای تولید شده توسط e_k ها باشد.
 د. هرگاه بعد V نامتناهی باشد.

الف. هرگاه V فضای ضرب داخلی باشد
 ج. هرگاه V متناهی باشد.

۱۷- مجموع مقادیر ویژه ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ کدام است؟

الف. ۶ ب. -۲ ج. -۳ د. ۲

۱۸- دو ماتریس قطری شدنی B, A در چه صورت همزمان قطری شدنی اند؟

الف. هرگاه $A = B^t$ ب. هرگاه $AB = BA$
 ج. هرگاه چند جمله‌ای‌های می‌نیمال یکسان داشته باشند
 د. هرگاه هم دو نامنفرد باشند

۱۹- نگاشت $f: V \rightarrow V$ در چه صورت پوچتوان است؟

الف. هرگاه ماتریس f قطری باشد
 ب. هرگاه f تصویر روی یک زیر فضا نباشد
 ج. هرگاه پایه ای وجود داشته باشد که ماتریس نمایش f نسبت به آن بالا مثلثی با قطر صفر باشد.
 د. هرگاه پایه ای وجود داشته باشد که ماتریس نمایش f نسبت به آن بالا مثلثی باشد.

۲۰- اگر V فضای ضرب داخلی با بعد متناهی و W یک زیر فضای دلخواه از آن باشد، آنگاه کدام گزینه نادرست

است؟ ($W^\perp =$ زیر فضای متمم متعامد W در V)

الف. $\dim W + \dim W^\perp = \dim V$ ب. $\dim W = \dim W^{\perp\perp}$

ج. $\dim W^{\perp\perp} + \dim W^\perp = \dim V$ د. $\dim W = \dim W^\perp$



تعداد سوال: نسی ۲۰ تکلیبی - تشریحی ۵
 زمان امتحان: تشریحی و تکلیبی ۶۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه
 تعداد کل صفحات: ۲

نام درس: جبر خطی
 رشته تحصیلی: گرایش: ریاضی
 کد درس: ۲۳۱۱۲۳

WWW.EGZA.TK

سئوالات تشریحی:

۱- اگر $f: V \rightarrow W$ یک نگاشت خطی و W, V فضاهای برداری روی میدان F باشند، به طوری که بعد V متناهی باشد، ثابت کنید.

$$\dim V = \dim(\ker f) + \dim(\text{Im } f)$$

۲- ابتدا ثابت کنید که بردارهای $\alpha_1 = (-3, 2, 1), \alpha_2 = (7, 4, 3), \alpha_3 = (1, 0, -2)$ در R^3 مستقل خطی اند.

سپس بردار δ را که در این پایه $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ مختصاتش برابر $\begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}_S$ باشد، بیابید.

سپس برای بردار $B = (-5, 18, 9)_E$ در پایه استاندارد $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ و مختصات جدید را در دستگاه S بیابید.

۳- الف) اگر ماتریسهای A, B متشابه باشند، ثابت کنید $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$.

ب) اگر λ یک مقدار ویژه عملگر وارون پذیر T باشد، نشان دهید λ^{-1} نیز یک مقدار ویژه T^{-1} خواهد بود.

۳- اگر $V = A \oplus B$ ، P تصویر روی A به موازات B باشد، آنگاه ثابت کنید شرایط زیر برقرارند:

$$\text{الف. } A = \text{Im } P = \{x \in V \mid x = p(x)\}$$

$$\text{ب. } B = \ker P$$

ج. P خود توان است.

۵- فرض کنید $\{v_1, \dots, v_n\}$ یک پایه V باشد و به ازای هر $i = 1, 2, \dots, n$ ، نگاشت خطی $v_i^d: V \rightarrow F$ با ضابطه زیر تعریف شده باشد.

$$v_i^d(v_j) = \begin{cases} 1_F, & j = i \\ 0_F, & j \neq i \end{cases} \quad \text{اگر}$$

ثابت کنید $\{v_1^d, \dots, v_n^d\}$ یک پایه V^d است.

