

بسم الله الرحمن الرحيم
اللهم صل على محمد و آل محمد



WWW.EGZA.TK

تعداد سوالات: نسی ۲۰ تکمیلی - تفریحی ۵
 زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۶۰ دقیقه تفریحی ۶۰ دقیقه
 تعداد کل صفحات: ۲

نام درس: هندسه دیفرانسیل موضعی ۱۳، ۱۰، ۸۶
 رشته تحصیلی: مگرایف: ریاضی
 کد درس: ۳۳۱۲۵۱
 (ساعت ۷۴)

۱. فرض کنید $V = x^2 U_1 - yz U_2$ و $f = x^2 - y^2 + z$ در این صورت $V[V[f]]$ کدام است؟

الف. $6x^2 - y^2 z$

ب. $6x^2 + yz$

ج. $6x^2 - y^2 z$

د. $6x^2 + yz$

۲. اثر ۱- فرمی $Q = x^2 dx + y^2 dy$ روی میدان $V = x U_1 - z U_2$ کدام است؟

الف. $x^2 - y^2 z$

ب. x^2

ج. $-y^2 z$

د. $x^2 - z$

۳. فرض کنید $F = (x^2, xyz, \frac{1}{y} z^2)$ و $v = (3, 5, 6)$ و $P = (1, 2, 3)$ در این صورت $F_*(v_p)$ کدام است؟

الف. $(38, 15, 18)$

ب. $(38, 15, 28)$

ج. $(38, 15, 18)$

د. $(38, 15, 28)$

۴. اگر $F: E^n \rightarrow E^m$ و $G: E^m \rightarrow E^p$ دو نگاشت باشند آنگاه کدام گزاره در مورد نگاشت مشتق نگاشت مرکب GF_* درست است؟

الف. $(GF)_* = F_* G_*$

ب. $(GF)_* = F_* G$

ج. $(GF)_* = G_* F_*$

د. $(GF)_* = G_* F$

۵. کدام گزاره نادرست است؟

الف. هر نگاشت یک به یک و پوشا، یک دیفیئورم فریم است.

ب. طول قوس خم β با تبدی واحد از $S = a$ تا $S = b$ برابر است با $(b - a)$.

ج. اگر β_1, β_2 دو تعویض پارامتر با تبدی واحد از خم α باشند، آنگاه عدد S_α را می توان طوری تعیین کرد که به ازاء

هر S داشته باشیم $\beta_2(S) = \beta_1(S + S_\alpha)$

د. هر مارپیچ $\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ دارای تبدی ثابت است.

۶. انحنا (خمیدگی) خم $y = \sin x$ در $x = \frac{\pi}{2}$ برابر است با:

الف. ۰

ب. ۱

ج. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

د. -۱



نام درس: هندسه دیفرانسیل موضعی

تعداد سؤال: نسی ۲۰ تکمیلی - تشریحی ۵

رشته تحصیلی: گرایش ریاضی

زمان امتحان: نسی و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه

کد درس: ۲۳۱۲۵۱

WWW.EGZA.TK

تعداد کل صفحات: ۲

۷. کدام گزاره نادرست است؟

- الف. شرط لازم و کافی برای آنکه خمی یک مارپیچ استوانه‌ای باشد آن است که نسبت $\frac{\tau}{k}$ مثبت باشد.
 ب. شرط لازم و کافی برای آنکه خم یک مارپیچ استوانه‌ای باشد آن است که نگاره کروی آن قسمتی از یک دایره باشد.
 ج. شرط لازم و کافی برای آنکه خم β با تندی واحد در E^3 با $k > 0$ مسطح باشد آن است که $\tau = 0$

د. پیش (تاب) نگاره کروی خم β با تندی واحد و با خمیدگی k و تاب τ برابر است با:

$$\tau_b = \frac{\frac{d}{ds} \left(\frac{\tau}{k} \right)}{k \left(1 + \left(\frac{\tau}{k} \right)^2 \right)}$$

۸. فرض کنید $W = \cos x U_1 + \sin x U_2$ و $V = -y U_1 + x U_2$ در اینصورت $\nabla_V W$ کدام است؟

- الف. $-y \sin x U_1 + y \cos x U_2$
 ب. $-y \sin x U_1 - y \cos x U_2$
 ج. $y \sin x U_1 - y \cos x U_2$
 د. $y \sin x U_1 + y \cos x U_2$

۹. دیفرانسیل کواریان $W = xy^2 U_1 - x^2 z^2 U_3$ برابر است با:

- الف. $(3y^2 dx + 2xy^2 dy) U_1 - (2x^2 z^2 dx + 2x^2 z dz) U_3 - 2x^2 z^2 U_3$
 ب. $(y^2 dx + 2xy^2 dy) U_1 - (2xz^2 dx + 2x^2 z dz) U_3$
 ج. $(y^2 dx + 2xy^2 dy) U_1 - (2x^2 z dx) U_3$
 د. $(-2xz^2 + 2x^2 z) dz) U_3$

۱۰. اگر $\omega = [\omega_{ij}]$ ماتریس فرمهای همبندی میدان سه وجهی کروی باشد آنگاه کدام گزینه صحیح است؟

- الف. $\omega_{23} = -\sin \phi d\phi$
 ب. $\omega_{22} = \cos \phi d\phi$
 ج. $\omega_{11} = \cos \phi d\phi$
 د. $\omega_{33} = -\sin \phi d\phi$

۱۱. کدام گزاره نادرست است؟

- الف. هر تبدیل متعامد، حافظ نرم است.
 ب. هر تبدیل متعامد، یک ایزومتري است.
 ج. اگر ایزومتري F دارای خاصیت $F(0) = 0$ باشد آنگاه F یک تبدیل متعامد است.
 د. اگر T_a یک انتقال باشد آنگاه به ازاء هر بردار مماس U_p ، $T_a(U_p)$ عمود بر U_p است.

۱۲. اگر $P = (P_1, P_2, P_3)$ آنگاه کدامیک از گزینه‌های زیر یک ایزومتري است؟

- الف. $F(P) = (-P_1, -P_2, -P_3)$
 ب. $F(P) = (-P_1, 1, -P_3)$

- ج. $F(P) = (P_1, P_2, 1)$
 د. $F(P) = (P \cdot a) a$ (با شرط $\|a\| = 1$)



نام درس: هندسه دیفرانسیل موضعی

تعداد سوال: نسی ۲۰ تکمیلی - تشریحی ۵

رشته تحصیلی: گرایش: ریاضی

زمان امتحان: تئوری و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه

کد درس: ۲۳۱۲۵۱

تعداد کل صفحات: ۴

WWW.EGZA.TK

۱۳. اگر $F = TaC$ یک ایزومتري باشد و F^{-1} معکوس آن باشد آنگاه بخش انتقال F^{-1} برابر است با:

الف. $-^1C(a)$

ب. $C(a)$

ج. $^1C(a)$

د. $-C(a)$

۱۴. کدام گزینه یک ایزومتري سوپرگردان است؟

الف. دوران حول محور Z ب. تقارن نسبت به صفحه YZ

ج. انتقال

۱۵. کدام گزینه توسط ایزومتري، همواره محفوظ باقی نمی ماند؟

الف. سرعت

ب. شتاب

ج. ضرب داخلی

د. جهت حاصلضرب خارجی

۱۶. در کدامیک از حالتهاي زیر نگاشت $x: D \subset E^r \rightarrow E^m$ یک قطعه مختصاتی است؟

الف. $x(u, v) = (u, u^r - 1, v^m)$

ب. $x(u, v) = (u^r - u, 1, v)$

ج. $x(u, v) = (u, v, uv)$

د. $x(u, v) = (\cos(r\pi u), \sin(r\pi u)v^r)$

۱۷. اگر ψ, ϕ دو ۱- فرمی روی رویه M باشند، حاصلضرب گوهای آنها یعنی $\phi \wedge \psi$ به ازاء هر زوج بردار مماس u, v برابر است با:

الف. $(\phi \wedge \psi)(u, v) = \phi(u)\psi(v) + \psi(u)\phi(v)$

ب. $(\phi \wedge \psi)(u, v) = \phi(u) + \psi(v)$

ج. $(\phi \wedge \psi)(u, v) = \phi(u)\psi(v) - \psi(u)\phi(v)$

د. $(\phi \wedge \psi)(u, v) = \phi(u) - \psi(v)$

۱۸. فرض کنید P صفحه‌ای در E^3 بوده و S عملگر شکلی P باشد، در اینصورت برای هر بردار مماس u در P داریم:

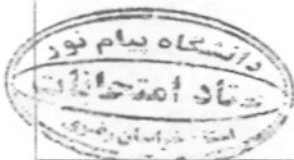
الف. $S(u) = 0$

ب. $S(u) = \frac{u}{r}$

ج. $S(u) = u$

د. $S(u) = -u$

۱۹. کدام گزاره نادرست است؟

الف. هر رویه کلاً نافی فشرده M قسمتی از یک صفحه است.ب. خمیدگی گاوسی رویه کلاً نافی فشرده M همواره ثابت است.ج. هر رویه کلاً نافی M قسمتی از یک کره یا قسمتی از یک صفحه است.د. هر رویه کلاً نافی فشرده M قسمتی از یک کره است.

نام درس: هندسه دیفرانسیل موضعی

تعداد سؤالات: نهمی ۲۰ تکمیلی - تفریحی ۵

رشته تحصیلی: گرایش: ریاضی

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۶۰ دقیقه تفریحی ۶۰ دقیقه

WWW.EGZA.TK

کد پرسش: ۲۴۱۲۵۱

تعداد کل صفحات: ۲

۲۰. اگر E_1, E_2, E_3 یک میدان سه وجهی برانزده روی E^3 باشد، انگاه کدام گزینه در مورد فرمهای دوگان آن و فرمهای همبندی روی M نادرست است؟

$$\begin{cases} d\theta_1 = w_{12} \wedge \theta_2 \\ d\theta_2 = w_{21} \wedge \theta_1 \end{cases}$$

الف. معادلات ساختاری اول

$$w_{11} \wedge \theta_1 + w_{22} \wedge \theta_2 = 0$$

ب. معادله تقارن

$$w_{12} = w_{21} \wedge w_{33}$$

ج. معادله گاورس

$$\begin{cases} d w_{12} = w_{12} \wedge w_{23} \\ d w_{23} = w_{23} \wedge w_{12} \end{cases}$$

د. معادلات کودازی

سؤالات تشریحی:

۱. اگر $\alpha: I \rightarrow E^3$ یک خم و $F: E^3 \rightarrow E^3$ یک نگاشت باشند ثابت کنید: سرعت خم نگاره α با نگاره سرعت برابر است. یعنی $(F(\alpha))' = F_*(\alpha')$

۲. ثابت کنید که شرط لازم و کافی برای آنکه خم β بانندی واحد در E^3 با $K > 0$ ، مسطح باشد آن است که: $\tau = 0$

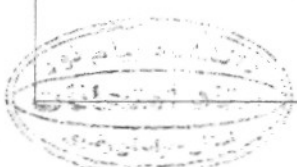
۳. فرض کنید α خمی با تندی واحد در E^3 با $k > 0$ باشد. فرض کنید E_1, E_2, E_3 یک میدان سه وجهی روی E^3 است بطوریکه تخصیص این میدانهای برداری به α ، میدان سه وجهی فرنه T, N, B مربوط به α را بدست می دهد. ثابت کنید:

$$w_{12}(T) = k, \quad w_{13}(T) = 0, \quad w_{23}(T) = \tau$$

و فرمولهای فرنه را از معادلات همبندی نتیجه بگیرید.

۴. ثابت کنید مشتقهای کوواریان بوسیله ایزومتري حفظ می شوند، یعنی $\nabla_V \bar{W} = \nabla_V \bar{W}$ که در آن به ازاء هر میدان برداری V و هر ایزومتري F ، میدان برداری \bar{V} بصورت $\bar{V}(F(P)) = \bar{V}(F(P))$ تعریف می شود.

۵. به ازاء هر نقطه p از $M \subset E^3$ ، ثابت کنید عملگر شکلی $S_p: T_p(M) \rightarrow T_p(M)$ یک عملگر خطی روی صفحه مماس M در p است.



نام درس: هندسه دیفرانسیل موضعی

تعداد سؤالات: نسی ۲۰ تکمیلی -- تشریحی ۵

رشته: تحصیلی-گرایش: ریاضی

زمان امتحان: تئوری و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه

کلاس: ۲۲۱۲۵۱ تاریخ: ۸۶/۳/۱۸ شروع: ۸:

تعداد کل صفحات: ۲

WWW.EGZA.TK

«توجه: استفاده از ماشین حساب مجاز نیست»

۱. فرض کنید $g = z^x$, $f = xy$, $V = y^x U_1 - x U_x$ در این صورت $V[fg]$ کدام است؟الف. $3x^x y^x z^x + yz$ ب. $3x^x yz^x - y^x z^x$ ج. $y^x z^x - 3x^x yz^x$ د. $3x^x y^x z^x - yz$ ۲. فرض کنید ϕ یک -1 فرمی و f تابعی حقیقی روی E^3 باشد اگر W و V میدانهای برداری باشند. کدامیک از گزاره‌های زیر درست است؟الف. $f\phi(fV + fW) = f(\phi V + \phi W)$ ب. $f\phi(fV + fW) = f^x(\phi V + \phi W)$ ج. $f\phi(fV + fW) = \phi V + \phi W$ د. $f\phi(fV + fW) = f^x(\phi V - \phi W)$ ۳. فرض کنید $f(x, y, z) = e^{\sin x} + e^{\sin y} + e^{\sin z}$, $g(x, y, z) = \cos(e^x) + \cos(e^y) + \cos(e^z)$ دراین صورت $d(fdg + gdf)$ در نقطه $(e, \frac{\pi}{2}, 1)$ کدام است؟الف. π ب. e ج. 0 د. e^{-1} ۴. فرض کنید $F = (x \cos y, x \sin y, z)$, $v = (2, -1, 3)$, $p = (2, \frac{\pi}{2}, \pi)$ در این صورت $F_*(v_p)$ کدام است؟الف. $(2, 2, 3)_{(2, \frac{\pi}{2}, \pi)}$ ب. $(1, 1, 3)_{(2, \frac{\pi}{2}, \pi)}$ ج. $(2, 2, 3)_{(2, \frac{\pi}{2}, \pi)}$ د. $(1, 1, 3)_{(2, \frac{\pi}{2}, \pi)}$

۵. کدامیک از گزاره‌های زیر درست است؟

الف. شرط لازم و کافی برای آنکه خم α ثابت باشد آن است که $\|\alpha'\| = 1$ ب. شرط لازم و کافی برای آنکه میدان برداری Y روی خم α متوازی باشد آن است که $\|\alpha\| = 1$ ج. شرط لازم و کافی برای آنکه خم غیر ثابت α یک خط راست باشد آن است که $\|\alpha'\| = 0$ د. شرط لازم و کافی برای آنکه خم غیر ثابت α یک خط راست باشد آن است که $\|\alpha''\| = 0$ ۶. فرض کنید $v = (1, -1, 2)$ بردار مماس در نقطه $p = (1, 3, -1)$ باشد و $V = xU_1 + x^2U_2 - z^2U_3$ و $W = x^2U_1 + yU_2$ دو میدان برداری باشند. در این صورت $\nabla_v[V+W]$ کدام است؟الف. $(4, 1, 3)_p$ ب. $(3, 1, 3)_p$ ج. $(3, 1, 4)_p$ د. $(4, 3, 3)_p$ 

نام درس: هندسه دیفرانسیل موضعی

رشته تحصیلی: گرایش ریاضی

تعداد سؤالات: نسی ۲۰ تکمیلی — تشریحی ۵

زمان امتحان: نسی و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه

تعداد کل صفحات: ۲

کلاس: ۲۳۱۲۵۱

WWW.EGZA.TK

۷. اگر $\beta(s) = \left(\frac{3}{5} \cos \frac{s}{5}, \frac{3}{5} \sin \frac{s}{5}, \frac{4}{5} \right)$ آنگاه $N(s)$ کدام است؟

الف. $\left(\cos \frac{s}{5}, \sin \frac{s}{5}, \frac{4}{5} \right)$

ب. $\left(\cos \frac{s}{5}, \sin \frac{s}{5}, 0 \right)$

ج. $\left(-\cos \frac{s}{5}, -\sin \frac{s}{5}, 0 \right)$

د. $\left(-\cos \frac{s}{5}, \sin \frac{s}{5}, \frac{4}{5} \right)$

۸. کدامیک از گزاره‌های زیر درست نیست؟

الف. به ازای هر دو سه وجهی مفروض بر E^3 مانند e_1, e_2, e_3 در نقطه p و f_1, f_2, f_3 در نقطه q یک ایزومتريیکتا مانند F وجود دارد به طوری که برای $1 \leq i \leq 3$ $F_*(e_i) = f_i$.ب. اگر T یک انتقال باشد، برای هر بردار مماس $T_*(v) \neq v$ بر V عمود است.ج. اگر e_1, e_2, e_3 یک سه وجهی در نقطه‌ای از E^3 ، F یک ایزومتري باشد، آنگاه:

$$F_*(e_1) \cdot F_*(e_2) \times F_*(e_3) = \text{Sgn} F \cdot e_1 \cdot e_2 \times e_3$$

د. اگر F, G دو ایزومتري باشند، آنگاه FG نیز یک ایزومتري است.

۹. کدامیک از ایزومتريهای زیر سوبرگردان است؟

الف. دوران حول محور Z به زاویه θ ب. تقارن ج. انتقال۱۰. فرض کنید α, β دو خم با تندی واحد باشند. β, α قابل انطباق اند اگر:

الف. $k_\alpha \neq \pm k_\beta$ ب. $\tau_\alpha = \tau_\beta$ ج. $\tau_\alpha = -\tau_\beta$ د. $\tau_\alpha = \pm \tau_\beta, k_\alpha = k_\beta$

۱۱. کدامیک از خمهای زیر موازیند؟

الف. $\begin{cases} \alpha(t) = (e^t, e^t) \\ \beta(t) = (e^{-t}, e^t) \end{cases}$

ب. $\begin{cases} \alpha(t) = (\sin t, e^t) \\ \beta(t) = (\cos t, e^t) \end{cases}$

ج. $\begin{cases} \alpha(t) = (t, \sin t) \\ \beta(t) = (t, \sin e^t) \end{cases}$

د. $\begin{cases} \alpha(t) = (\sin t, e^t + 1) \\ \beta(t) = (\sin t - 1, e^t) \end{cases}$

۱۲. در کدامیک از حالت‌های زیر نگاشت $x: D \subset E^2 \rightarrow E^3$ یک قطعه مختصاتی است؟

الف. $x(u, v) = (u, uv, v)$ ب. $x(u, v) = (u, u^2, v^2)$

ج. $x(u, v) = (\cos(r\pi u), \sin(r\pi u), v^2)$ د. $x(u, v) = (u^2 - u, v, 1)$



نام درس: هندسه دیفرانسیل موضعی

رشته تحصیلی: گرافیز: ریاضی

تعداد سؤالات: نسی ۲۰ تکمیلی -- تشریحی ۵

زمان امتحان: نسی و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه

تعداد کل صفحات: ۲

WWW.EGZA.TK

کلاس: ۲۳۱۲۵۱

۱۳. فرض کنید f, g توابعی روی M, φ یک -1 فرمی باشد. کدامیک از روابط زیر درست است؟

الف. $(df \wedge dg)(V, W) = V[f]W[g] - V[g]W[f]$

ب. $d(\varphi f) = fd\varphi + \varphi \wedge df$

ج. $(df \wedge dg)(V, W) = V[f]W[g] + V[g]W[f]$

د. $d(\varphi f) = 0$

۱۴. فرض کنید $M: z = xy$. کدامیک از گزاره‌های زیر درست است؟الف. $V = (-y, -x, 1)$ میدان برداری قائم بر M و $W = (x, -y, 0)$ میدان برداری مماس بر M .ب. $V = (y, x, 1)$ میدان برداری قائم بر M و $W = (y, 1, z)$ میدان برداری مماس بر M .ج. $V = (-y, -x, 1)$ میدان برداری قائم بر M و $W = (x, y, z)$ میدان برداری مماس بر M .د. $V = (-y, -x, 1)$ میدان برداری قائم بر M و $W = (x, 0, 1)$ میدان برداری مماس بر M .۱۵. فرض کنید P صفحه‌ای در E^3 باشد و S عملگر شکلی P باشد. آنگاه برای هر بردار مماس v در P داریم:

الف. $S(v) = 0$ ب. $S(v) = -v$ ج. $S(v) = v$ د. $S(v) = \frac{v}{2}$

۱۶. کدامیک از عبارات زیر نادرست است؟

الف. رویه M در E^3 را هموار می‌نامیم هرگاه خمیدگی گاوسی آن صفر باشد.ب. رویه M در E^3 را می‌نامیم هرگاه خمیدگی گاوسی آن صفر باشد.

ج. هلیکونید یک رویه می‌نیمال است.

د. خم منظم α در $M \subset E^3$ را خم اصلی نامند. هرگاه سرعت آن همواره در مقدار اصلی باشد.۱۷. فرض کنید M یک رویه باشد و $P \in M$. در کدامیک از حالت‌های زیر تقریب درجه دوم M در مجاورت P استوانه

$$k_1(p)x^2 + k_2(p)y^2 = z^2$$
 است.

الف. $k(p) < 0$ ب. $k(p) > 0$

ج. $k_1(p) = 0, k_2(p) \neq 0, k(p) = 0$ د. $k_1(p) = k_2(p) = 0$

۱۸. کدامیک از گزاره‌های زیر درست است؟

الف. اگر $M \subset E^3$ و کلاً نافی باشد، آنگاه M بخشی از یک کره در E^3 به شعاع $\frac{1}{\sqrt{k}}$ است.ب. اگر M در E^3 نافی باشد، آنگاه M بخشی از یک صفحه است.ج. اگر عملگر شکلی M متحداً صفر شود، آنگاه M بخشی از یک کره است.د. اگر $M \subset E^3$ و کلاً نافی باشد، آنگاه خمیدگی گاوسی M ثابت است و $k \geq 0$.

نام درس: هندسه دیفرانسیل موضعی

تعداد سؤالات: فنی ۲۰ تکمیلی ۵ تشریحی ۵

رشته تحصیلی: گرایش: ریاضی

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه

تعداد کل صفحات: ۲

WWW.EGZA.TK

کد درس: ۳۳۱۲۵۱

۱۹. فرض کنید E_1, E_p, E_m یک میدان سه وجهی اصلی روی $M \subset E^3$ باشد. کدامیک از عبارات زیر درست است؟

الف. $E_1[k_p] = (k_p - k_1)\omega_{1p}(E_1)$ ب. $E_p[k_1] = (k_1 - k_p)\omega_{1p}(E_1)$

ج. $E_p[k_1] = (k_p - k_1)\omega_{1p}(E_1)$ د. $E_1[k_p] = (k_1 - k_p)\omega_{1p}(E_1)$

۲۰. میدان سه وجهی برازنده استوانه $M: x^2 + y^2 = 9$ کدام است؟

الف. $E_1 = U_m, E_p = \frac{1}{3}(-yU_1 + xU_p), E_m = \frac{1}{3}(xU_1 + yU_p)$

ب. $E_1 = \frac{V}{\|V\|}, E_p = E_m \times E_1, E_m = \frac{1}{3}(xU_1 + yU_p + zU_m)$

ج. $E_1 = U_1, E_p = U_p, E_m = U_m$

د. $E_1 = U_m, E_p = U_p, E_m = U_1$

سؤالات تشریحی

۱. فرض کنید F یک ایزومتري از E^3 با بخش متعامد C باشد. در این صورت برای هر بردار مماس v_p از E^3 داریم:

$$F_*(v_p) = (Cv)_{F(p)}$$

۲. اگر $M: g = c$ رویه‌ای در E^3 باشد، در این صورت میدان برداری گرادیان $\nabla g = \sum (\partial g / \partial x_i) U_i$ (که فقط روی نقاط متعلق به M در نظر گرفته می‌شود) یک میدان برداری قائم روی تمام رویه M می‌باشد.

۳. خمیدگی گوس و متوسط هلیکوئید که با قطعه مختصاتی زیر پوشیده می‌شود را بدست آورید.

$$x(u, v) = (u \cos v, u \sin v, bv) \quad b \neq 0$$

۴. نشان دهید که رویه کلاً نافی فشرده M در E^3 ، یک کره کامل است.۵. اگر W یک میدان برداری با طول ثابت $\|W\|$ باشد، ثابت کنید که مشتق کوارین $\nabla_p W$ برای هر میدان برداری V همواره بر W عمود است.