

بسم الله الرحمن الرحيم
اللهم صل على محمد و آل محمد



www.egza.tk

برای دریافت سوالات دروس دیگر
می توانید به آدرس زیر مراجعه کنید

جبر خطی عددی نیمسال اول ۸۵

«توجه: استفاده از ماشین حساب مجاز است»

۱. کدام گزینه صحیح می‌باشد، یک ماتریس پایین مثلثی و یا بالا مثلثی
 الف. اگر نامنفرد باشد آنگاه عناصر روی قطر مخالف صفر است.
 ب. اگر عناصر روی قطر مخالف صفر باشد آنگاه نامنفرد است.
 ج. الف و ب به طور همزمان برقرار است.

د. هیچکدام

۲. اگر روش حذفی گوس با محورگیری سطری مقیاس شده به کار رود آنگاه جواب دستگاه $Ax = b$ (A ثابت و b بردار مختلف b) تقریباً شامل چه تعداد عمل ضرب و تقسیم است؟

الف. $\frac{1}{3}n^3$ ب. $(\frac{1}{2} + m)n^2$ ج. $\frac{1}{2}n^3 - (\frac{1}{3} + m)n^2$ د. $\frac{1}{3}n^3 + (\frac{1}{2} + m)n^2$

۳. کدام خاصیت زیر برای نرمها برقرار نمی‌باشد؟

الف. $\|0\| = 0$

ب. $\|x + y\| \geq |\|x\| - \|y\||$

ج. $\|x + y\| \geq \|x\| + \|y\|$

د. $\| \sum_{i=1}^m x^{(i)} \| \leq \sum_{i=1}^m \|x^{(i)}\|$ برای بردارهای $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)}$

۴. شرط اینکه معادله $Ax = \lambda x$ ، که در آن $x = (x_1, \dots, x_n)$ ، $A \in M_{n \times n}$ ، اسکالر می‌باشد، دارای جواب غیر بدیهی باشد معادل است با:

الف. $A - \lambda I$ بردار غیر صفر را به صفر بنگارد ب. $A - \lambda I$ منفرد است

ج. $\det(A - \lambda I) = 0$

- د. هر سه مورد
۵. اگر λ یک مقدار ویژه A و A نامنفرد باشد آنگاه:

الف. λ^{-1} یک مقدار ویژه A است.

ب. λ^{-1} یک مقدار ویژه A^{-1} است.

ج. λ^{-1} یک مقدار ویژه A^{-1} ، A است.

د. λ^{-1} یک مقدار ویژه A^T است.

۶. کدام مورد صحیح نمی‌باشد؟

الف. روش توانی بزرگترین مقدار ویژه متناظر معادله $X^{(k+1)} = AX^{(k)}$ را می‌دهد.

ب. روش توانی کوچکترین مقدار ویژه متناظر معادله $X^{(k+1)} = AX^{(k)}$ را می‌دهد.

ج. روش توانی انتقال یافته دورترین مقدار ویژه به μ متناظر با معادله $X^{(k+1)} = (A - \mu I)X^{(k)}$ را می‌دهد.

د. روش توانی معکوس انتقال یافته نزدیکترین مقدار ویژه به μ متناظر با معادله $X^{(k+1)} = (A - \mu I)X^{(k)}$ را

می‌دهد.

۷. طیف یک ماتریس $n \times n$ ، A

الف. در اجتماع n قرص $D_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|\} \quad 1 \leq i \leq n$ قرار دارد.

ب. در اشتراک n قرص $D_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|\}$ قرار دارد.

ج. در اجتماع n قرص $D_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| < \sum |a_{ij}|\}$ قرار دارد.

د. در اشتراک n قرص $D_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| < \sum |a_{ij}|\}$ قرار دارد.

۸. فرض کنید ماتریس A به شکل افراز شده $A = \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & E \end{bmatrix}$ باشد که E, B ماتریسهای مربعی هستند آنگاه طیف A

الف. اشتراک طیفهای E, B است.

ب. اجتماع طیفهای E, B است.

ج. طیف C می باشد.

د. هیچکدام

۹. کدام مورد صحیح می باشد؟

الف. اگر T بالامتثلی و معکوس پذیر باشد، T^{-1} نیز چنین است.

ب. اگر A بالا هسنبرگی و T بالامتثلی باشند، آنگاه AT و TA بالا هسنبرگی هستند.

ج. اگر T بالا متثلی و AT بالا هسنبرگی باشند، آنگاه TA بالا هسنبرگی است.

د. همه موارد صحیح است.

۱۰. کدامیک از اعمال زیر به عنوان اعمال مقدماتی جهت بدست آوردن دستگاه هم ارز نمی باشد؟

الف. $E_i \leftrightarrow E_j$ ب. $E_i E_j \rightarrow E_j$ ج. $\lambda E_i \rightarrow E_i$ د. $E_i + \lambda E_j \rightarrow E_i$

۱۱. نامنفرد بودن ماتریس $n \times n$ مانند A معادل کدام گزینه نمی باشد؟

الف. دترمینان A مخالف صفر است.

ب. ستونهای A پایه ای برای R^n تشکیل می دهند.

ج. برای هر $b \in R^n$ ، دقیقاً یک $x \in R^n$ وجود دارد که $Ax = b$

د. صفر یک مقدار ویژه A است.

۱۲. اگر ماتریس مربعی A پاد متقارن باشد ($A^T = -A$) آنگاه:

الف. به ازای هر x ، $x^T Ax = 0$

ب. به ازای هر x ، $x^T Ax \geq 0$

ج. به ازای هر x ، $x^T Ax \leq 0$

د. مقدار و علامت $x^T Ax$ بستگی به x دارد.

۱۲. کدام گزینه صحیح نمی باشد؟

- الف. در الگوریتم تجزیه LU، ماتریس A حاصلضرب دو ماتریس بالا مثلثی U و پایین مثلثی L تجزیه می شود.
 ب. در الگوریتم تجزیه چولسکی، ماتریس حقیقی، متقارن و معین مثبت A به صورت $A = LL^T$ تجزیه می شود که L یک ماتریس پایین مثلثی با عناصر قطری مثبت است.
 ج. الگوریتم تجزیه چولسکی یک حالت خاص الگوریتم تجزیه LU است.
 د. الگوریتم تجزیه چولسکی، ماتریس حقیقی، متقارن و نیمه معین مثبت (معین نامنفی) A را به صورت $A = LL^T$ تجزیه می کند که L یک ماتریس بالا مثلثی با عناصر قطری مثبت است.

۱۴. اگر $K(A)$ عدد وضعیت ماتریس A باشد آنگاه:

الف. $K(\lambda A) = K(A)$ و $\lambda \neq 0$ ب. $K(\lambda A) = \lambda K(A)$

د. هیچکدام از موارد فوق صحیح نمی باشد.

ج. $K(AB) = K(A)K(B)$

۱۵. شرط لازم و کافی برای آنکه فرمول تکراری $x^{(k)} = Gx^{(k-1)} + c$ به ازای هر بردار اولیه $x^{(0)}$ دنباله همگرایی

$(I - G)^{-1}c$ را تولید کند آن است که:

ب. شعاع طیفی G بزرگتر از ۱ باشد.

الف. شعاع طیفی G کوچکتر از ۱ باشد.

د. شعاع طیفی G صفر باشد.

ج. شعاع طیفی G برابر ۱ باشد.

۱۶. در صورتی که $(\lambda_i)_{i=1}^n$ مقادیر ویژه A باشند، آنگاه اثر ماتریس A^m عبارت است از:

د. $\prod_{i=1}^n \lambda_i^m$

ج. $\sum_{i=1}^n \lambda_i^m$

ب. $\prod_{i=1}^m \lambda_i$

الف. $m(\sum_{i=1}^n \lambda_i)$

۱۷. متناظر با هر ماتریس A ماتریس X با چهار خاصیت پنز وجود دارد.

ب. حداقل یک ...

الف. حد اکثر یک ...

د. در صورتی که ماتریس A متقارن باشد یک ...

ج. دقیقاً یک ...

۱۸. اگر A و B ماتریسهای مربعی باشند،

الف. AB و BA مقادیر ویژه معکوس هم دارند.

ب. AB و BA مقادیر ویژه یکسان دارند.

ج. ممکن است در حالی که AB مقدار ویژه دارد BA هیچ مقدار ویژه ای نداشته باشد.

د. نمی توان نظری قطعی در مورد رابطه مقادیر ویژه AB و BA بیان نمود.

۱۹. اگر ماتریس A با تبدیل مشابه $P^{-1}AP$ قطری شود و B ماتریس دلخواهی باشد آنگاه مقادیر ویژه A+B

الف. در کوچکترین قرص با نمایش زیر قرار می‌گیرند: $\{\lambda \in C : |\lambda - \lambda_i| \leq K_\infty(p) \|B\|_\infty\}$

ب. در بزرگترین قرص با نمایش زیر قرار می‌گیرند: $\{\lambda \in C : |\lambda - \lambda_i| \leq K_\infty(p) \|B\|_\infty\}$

ج. در اشتراک قرصهای $\{\lambda \in C : |\lambda - \lambda_i| \leq K_\infty(p) \|B\|_\infty\}$ قرار می‌گیرند.

د. در اجتماع قرصهای $\{\lambda \in C : |\lambda - \lambda_i| \leq K_\infty(p) \|B\|_\infty\}$ قرار می‌گیرند که در آن $(\lambda_i)_{i=1}^n$ مقادیر ویژه A

و $K_\infty(p)$ عدد وضعیت (حالت) P می‌باشد.

۲۰. مقادیر ویژه ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ عبارت است از:

الف. $\lambda_1 = 4$ ، $\lambda_2 = \frac{\sqrt{7}}{2}$ ، $\lambda_3 = \frac{1}{2}$ ب. $\lambda_1 = 4$ ، $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ ، $\lambda_3 = \frac{-1}{2}$

ج. $\lambda_1 = 4$ ، $\lambda_2 = \frac{\sqrt{7}}{2}i$ ، $\lambda_3 = -\frac{\sqrt{7}}{2}i$ د. $\lambda_1 = 4$ ، $\lambda_2 = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}i$ ، $\lambda_3 = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}i$

سؤالات تشریحی

۱. تکرار مرتبه دوم $(X^{(2)})$ گوس - سایدل دستگاه زیر را با $X^{(0)} = (0, 0, 0)^T$ بیابید.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 6 & -2 \\ 4 & -3 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

۲. با استفاده از قرصهای گرشگورین بازه‌ای که مقادیر ویژه A در آن قرار دارند بدست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} -1+i & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

۳. یک تجزیه مقدار تکین برای ماتریس زیر بیابید.

$$\begin{bmatrix} 0 & -1/6 & 0/6 \\ 0 & 1/2 & 0/8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(با فرض $\sigma_3 = 0, \sigma_2 = 2, \sigma_1 = 1$)

۴. ثابت کنید اگر همه n کهاد اصلی پیشرو در ماتریس $n \times n$ A نامنفرد باشند آنگاه A یک تجزیه LU دارد.

۵. اگر در A^{-1} اختلال ایجاد شود یک ماتریس جدید B به دست می‌آید. آنگاه در جواب $x = A^{-1}b$ نیز اختلال ایجاد خواهد

شد و بردار جدید $\tilde{x} = Bb$ به دست خواهد آمد. این اختلال اخیر به طور مطلق و به طور نسبی تا چه اندازه بزرگ است؟