بسم الله الرحمن الرحیم

اللهم صل علی محمد و آل محمد

«استفاده از ماشین حساب مجاز است.»

۱. ماتریس A را سه قطری گویند اگر

الف. $a_{ij} = 0 \,, |i-j| > 1$
ب. $a_{ij} = 0 \,,\ i-j > 1$
ج. $a_{ij} = 0 \,, |i-j| < 1$
د. $a_{ij} = 0 \,,\ i-j < 1$

۲. ماتریس A را پایین هسنبرگی گویند اگر :

الف. $a_{ij} = 0 \,,\ i > j+1$
ب. $a_{ij} = 0 \,,\ j > i+1$
ج. $a_{ij} = 0 \,,\ i > j-1$
د. $a_{ij} = 0 \,,\ j > i-1$

۳. ماتریس $\begin{bmatrix} 2+i & 3 \\ 1 & 2-i \end{bmatrix}$ یک ماتریس:

الف. یکانی است. ب. متعامد است. ج. هرمیتی است د. متقارن است.

۴. اگر A یک ماتریس پادمتقارن باشد آنگاه کدامیک از گزاره‌های زیر صحیح است؟

الف. عناصر قطر اصلی A همگی صفرند.
ب. مقادیر ویژه A صفر یا موهومی محض‌اند.
ج. $A = -A^t$
د. هر سه مورد

۵. اگر A یک ماتریس قطر غالب باشد، کدامیک از گزاره‌های زیر صحیح است؟

الف. A نامنفرد است.
ب. $a_{ii} > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij} \quad i = 1,\dots,n$
ج. $|a_{ii}| \geq \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \quad i = 1,\dots,n$
د. هیچکدام

۶. کدامیک از گزاره‌های زیر نادرست است؟

الف. اگر A یک ماتریس قطری باشد آنگاه $\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$

ب. اگر A یک ماتریس مثلثی باشد آنگاه $\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$

ج. اگر A یک ماتریس معکوس‌پذیرباشد آنگاه $\det A = -\det A^{-1}$

د. اگر A یک ماتریس متعامد باشد آنگاه دترمینان A ۱ یا ۱- است.

۷. اگر $X = (-1, 2, \sqrt[3]{18})$ آنگاه $\|X\|_3$ برابر است با :

الف. ۱۸ ب. $\sqrt[3]{18}$ ج. ۳ د. ۲

۸. مجموع مقادیر ویژه ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ ۳ & -۱ & ۴ \\ ۲ & ۱ & ۳ \end{bmatrix}$ برابر است با :

الف. ۴   ب. ۶   ج. ۱۰   د. ۸

۹. اگر مقادیر ویژه A ، $-۲,۰,۱$ باشند آنگاه مقادیر ویژه $A^{-۱}$ کدامند؟

الف. $-\frac{۱}{۲},۰,۱$ ب. $-۲,۰,-۱$ ج. $-۲,۰,۱$ د. A وارون‌پذیر نمی‌باشد.

۱۰. حاصلضرب مقادیر ویژه ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۳ & ۵ & ۲ \\ ۱ & ۴ & ۳ \end{bmatrix}$ برابر است با :

الف. ۷   ب. ۹   ج. ۱۰   د. ۱۹

۱۱. کدامیک از گزاره‌های زیر درست است؟

الف. مقادیر ویژه دو ماتریس BA, AB برابرند.   ب. بردارهای ویژهٔ ماتریسهای BA, AB یکسانند.

ج. مقادیر ویژهٔ ناصفر ماتریسهای BA, AB یکسانند.   د. هیچکدام

۱۲. اگر مقادیر ویژه ماتریس A، ۱و $۴-۳i$, $۴+۳i$ باشند آنگاه $\rho(A)$ برابر است با :

الف. ۱   ب. ۵   ج. ۷   د. صفر

۱۳. دوایر قضیه گرشگورین برای ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۳ & ۵ & ۱ \\ ۴ & -۲ & ۳ \\ -۲ & ۰ & ۹ \end{bmatrix}$ کدام است؟

الف. $\begin{cases} R_۱=\{z\in ¢ :|z-۳|\le ۶\} \\ R_۲=\{z\in ¢ :|z-۲|\le ۷\} \\ R_۳=\{z\in ¢ :|z-۹|\le ۲\} \end{cases}$

ب. $\begin{cases} R_۱=\{z\in ¢ :|z-۳|\le ۶\} \\ R_۲=\{z\in ¢ :|z+۲|\le ۷\} \\ R_۳=\{z\in ¢ :|z-۹|\le ۲\} \end{cases}$

ج. $\begin{cases} R_۱=\{z\in ¢ :|z-۳|\le ۵\} \\ R_۲=\{z\in ¢ :|z+۲|\le ۴\} \\ R_۳=\{z\in ¢ :|z-۹|\le ۲\} \end{cases}$

د. $\begin{cases} R_۱=\{z\in ¢ :|z-۳|\le ۱\} \\ R_۲=\{z\in ¢ :|z-۲|\le ۳\} \\ R_۳=\{z\in ¢ :|z-۹|\le ۲\} \end{cases}$

۱۴. رابطه $\dfrac{y_{i+1} - ۲y_i + y_{i-1}}{h^۲}$ بعنوان تقریبی از y_i'' دارای خطای برشی از مرتبهٔ

الف. h است. ب. $h^۲$ است. ج. $h^۳$ است د. $h^۴$ است

۱۵. در روشی ژاکوبی برای یافتن مقدار ویژه ماتریس :

$$A = \begin{bmatrix} ۱۰ & ۷ & ۸ & ۷ \\ ۷ & ۵ & ۶ & ۵ \\ ۸ & ۶ & ۱۰ & ۹ \\ ۷ & ۵ & ۹ & ۱۰ \end{bmatrix}$$

مقدار $\theta_۱$ برابر است با :

الف. $\dfrac{\pi}{۴}$ ب. $\dfrac{\pi}{۲}$ ج. $\dfrac{\pi}{۳}$ د. π

۱۶. برای تبدیل ماتریس زیر به یک ماتریس سه قطری متقارن با استفاده از تبدیلات گیونز θ برابر است با :

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰/۵ \\ ۱ & ۱ & ۰/۲۵ \\ ۰/۵ & ۰/۲۵ & ۲ \end{bmatrix}$$

الف. $tg^{-۱}\dfrac{۱}{۲}$ ب. $tg^{-۱}\dfrac{۱}{۳}$ ج. $\dfrac{\pi}{۲}$ د. $\dfrac{\pi}{۴}$

۱۷. برای تبدیل ماتریس زیر به یک ماتریس سه قطری متقارن با استفاده از روش هاوس هلدر مقدار پارامتر S برابر است با :
(به ازای $k = ۲$)

$$\begin{bmatrix} ۶ & -۲ & ۱ & ۲ \\ -۲ & -۱۱/۸ & -۵ & -۱۲۵ \\ ۱ & -۵ & ۱۳ & -۴ \\ ۱ & -۱۲ & -۴ & ۲ \end{bmatrix}$$

الف. ۹ ب. ۱۶۹ ج. ۱۶ د. ۱۷

۱۸. اگر $X^{\circ} = (۰, ۰, ۰)$ بردار $X^{(۲)}$ برای دستگاه زیر با استفاده از روش ژاکوبی کدام است؟

$$\begin{cases} ۱۰x_۱ - ۲x_۲ - x_۳ = ۳ \\ -x_۱ + ۵x_۲ - x_۳ = ۶ \\ -x_۱ - x_۲ + ۲x_۳ = ۳ \end{cases}$$

الف. $(۰/۳, ۱/۲, ۱/۵)$ ب. $(۰/۶۹, ۱/۵۶, ۲/۲۵)$
ج. $(۱, ۲, ۳)$ د. $(۳, ۶, ۳)$

۱۹. برای دستگاه معادلات سؤال ۱۸ با $X^\circ = (\circ, \circ, \circ)$ مقدار $X^{(۲)}$ به روش گاوس سایدل عبارت است از :

الف. $(\circ/۳, ۱/۲۶, ۲/۲۸)$ ب. $(\circ/۶۹, ۱/۵۶, ۲/۲۵)$

ج. $(\circ/۳, ۱/۲, ۱/۵)$ د. $(\circ/۷۸, ۱/۸۱۲, ۲/۷۹۶)$

۲۰. برای ماتریس $A = \begin{bmatrix} -۳ & \circ \\ \circ & ۲ \end{bmatrix}$ ، $\| A \|_۲$ کدام است؟

الف. ۱ ب. ۲ ج. ۳ د. ۵

سؤالات تشریحی:

۱. نشان دهید به ازای هر نرم طبیعی $\rho(A) \leq \| A \|$ که در آن $\rho(A)$ شعاع طیفی ماتریس A است.

۲. ماتریس زیر را به روش تجزیه کروت به حاصلضرب ماتریسهای بالا مثلثی U و پائین مثلثی L تجزیه کنید.

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۴ & -۶ \\ ۱ & ۵ & ۳ \\ ۱ & ۳ & ۲ \end{bmatrix}$$

۳. دترمینان ماتریس زیر را به روش حذفی و با استفاده از محورگیری کلی بدست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} ۴ & ۱ & -۲ & ۳ \\ ۲ & ۲ & \circ & ۴ \\ \circ & ۳ & -۱ & -۲ \\ ۲ & ۱ & ۲ & -۳ \end{bmatrix}$$

۴. معادلهٔ مشخصه ماتریس پایین هسنبرگی زیر را به روش گفته شده در کتاب بدست آورید.

$$B = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & \circ \\ ۳ & ۴ & ۱ \\ ۶ & ۷ & ۸ \end{bmatrix}$$

۵. دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} \dfrac{d\,u(t)}{dt} = ۲u(t) + ۶v(t) \\ \dfrac{d\,v(t)}{dt} = -۲u(t) - ۵v(t) \end{cases}$$

آنالیز عددي۲ نیمسال اول ۸۵

استفاده از ماشین حساب مجاز است:

۱. اگر $A=(a_{ij})\ \ i,j=۱,\ldots,n$ آنگاه A یک ماتریس سه قطری است اگر:

الف. $a_{ij}=۰\ ,|i-j|<۱$ ب. $a_{ij}=۰\ ,i>j+۱$

ج. $a_{ij}=۰\ ,i<j+۱$ د. $a_{ij}=۰\ ,|i-j|>۱$

۲. اگر A یک ماتریس معین مثبت باشد آنگاه کدامیک از گزاره‌های زیر در مورد A صادق نیست؟

الف. $\det A\neq ۰$ ب. A دارای مقدار ویژه صفر نیست

ج. $tr(A)\neq ۰$ د. A اکیداً قطر غالب است.

۳. اگر $X=(۱,۱,۱,۱)^t$ آنگاه مقدار عبارت $(\|X\|_۲-\|X\|_۱)\ \|X\|_\infty$ کدام است؟

الف.2 ب.1 ج.-2 د.-1

۴. اگر $A=\begin{bmatrix} ۳ & ۲ & ۱ \\ ۵ & ۰ & -۳ \\ -۱ & -۲ & ۴ \end{bmatrix}$ آنگاه $\|A\|_\infty - \|A\|_۱$ برابر است با:

الف.-1 ب. 5 ج.1 د.4

۵. کدامیک از ماتریس های زیر متعامد است.

الف. $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ ب. $\begin{bmatrix} \frac{۱}{\sqrt{۲}} & \frac{۱}{\sqrt{۲}} \\ \frac{۱}{\sqrt{۲}} & -\frac{۱}{\sqrt{۲}} \end{bmatrix}$

ج. $\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ د. $\begin{bmatrix} \frac{۱}{\sqrt{۲}} & -\frac{۱}{\sqrt{۲}} \\ -\frac{۱}{\sqrt{۲}} & \frac{۱}{\sqrt{۲}} \end{bmatrix}$

۶.عدد شرطی ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ با استفاده از نرم بی نهایت کدام است؟

الف. ۱ ب.۲ ج.۳ د.۴

۷. تعداد اعمال ضرب وتقسیم درالگوریتم روش گاوس – ژردن برابراست با:

الف. $\frac{n^{3}}{2}+n^{2}-\frac{n}{2}$ ب. $\frac{n^{3}+n}{3}$

ج. $\frac{n^{3}}{6}-\frac{n}{12}$ د. $\frac{n^{3}}{3}-n^{2}+n$

۸ ماتریس B_g در روش تکراری گاوس – سایدل که با رابطه $X^{(k)}=B_g X^{(k-1)}+C_g$ داده می شود کدام است؟

الف. $-(D+L)^{-1}U$ ب. $-(D-L)^{-1}U$ ج. $-D^{-1}(L+U)$ د. $-D^{-1}(L-U)$

۹. برادرC در روش ژاکوبی که بارابطه $X^{(k)}=B_j X^{(k-1)}+C$ داده می‌شود کدام است؟

الف. $(L+D)^{-1}b$ ب. $L^{-1}b$ ج. $(L-D)^{-1}b$ د. $D^{-1}b$

۱۰. دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=6 \\ 2x_1+3x_2+4x_3=9 \\ 3x_1+5x_2+7x_3=17 \end{cases}$$

این دستگاه

الف. دارای جواب منحصر به فرد است. ب. دارای بی نهایت جواب است

ج. دارای جواب نمی باشد د. قبل از حل دستگاه چیزی نمی‌توان گفت

۱۱.هرگاه A معین مثبت وسه قطری باشد آنگاه بهترین مقدار w برای روش SOR کدام است؟

الف. $w=\frac{2}{1+\sqrt{1+\rho(B_g)}}$ ب. $w=\frac{2}{1+\sqrt{1-\rho(B_g)}}$

ج. $w=\frac{1}{2+\sqrt{1+(\rho(B_j))^{2}}}$ د. $w=\frac{1}{2+\sqrt{1-[\rho(Bj)]^{2}}}$

۱۲. دنباله حاصل از روش تکراری $X^{(k)}=BX^{(k-1)}+C$ با شروع از هر $X^{(0)}$ همگراست اگر:

الف. $(I-B)$ منفرد باشد ب. شعاع طيفي ماتريسB كوچكتر از يک باشد.

ج. ماتریس I-B دارای مقدار ویژه صفر نباشد د. به ازای نرمهای ماتریس داشته باشیم $\|B\|>1$

۱۳. کدامیک از موارد زیر با بقیه معادل نیست؟

الف. $\rho(A) = \| A \|$

ب. $\lim_{k \to \infty} (A^k)_{ij} = ۰$

ج. $\rho(A) < ۱$

د. A یک ماتریس همگراست.

۱۴. هرگاه A یک ماتریس $n \times n$ حقیقی باشد آنگاه $\| A \|_۲$ عبارت است از:

الف. $\rho(A^t)\rho(A)$

ب. $\sqrt{\rho(AA^t)}$

ج. $\rho(A^۲)$

د. $\sqrt{\rho(A^t A)}$

۱۵. مجموع مقادیر ویژه ماتریس زیر کدام است؟

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۵ & ۶ & ۷ & ۸ \\ ۹ & ۱۰ & ۱۱ & ۱۲ \\ ۱۳ & ۱۴ & ۱۵ & ۱۶ \end{bmatrix}$$

الف. ۱۶

ب. ۴۰

ج. ۳۴

د. ۵۸

۱۶. اگر مقادیر ویژه ماتریس A، $-\frac{۱}{۲}, -\frac{۱}{۳}, \frac{۱+i\sqrt{۳}}{۲}, \frac{۱-i\sqrt{۳}}{۲}$ باشد آنگاه $\rho(A)$ برابر است با:

الف. $\frac{۱}{۳}$

ب. $\frac{۱}{۲}$

ج. ۱

د. ۴

۱۷. کدامیک از گزاره های زیر صحیح است؟

الف. مقادیر ویژه ماتریسهای BA,AB یکسانند.

ب. بردارهای ویژه ماتریسهای BA,AB یکسانند

ج. مقادیر ویژه ناصفر ماتریسهای BA,AB یکسانند

د. درحالت کلی ارتباطی بین مقادیر ویژه BA,AB وجود ندارد.

۱۸. برای ماتریس زیر مقدار $V_{۲}^{(۲)}$ در روش هاوس هلدر کدام است؟

$$A=\begin{bmatrix} ۶ & -۲ & ۱ & ۲ \\ -۲ & -۱۱/۸ & -۵ & -۱۲۵ \\ ۱ & -۵ & ۱۳ & -۴ \\ ۲ & -۱۲ & -۴ & ۲ \end{bmatrix}$$

الف. $\sqrt{\frac{۵}{۶}}$ ب. $-\frac{۱}{\sqrt{۳۰}}$ ج. $+\frac{۱}{\sqrt{۳۰}}$ د. ۳

۱۹. برای صفر کردن عنصر $a_{۳۴}$ درماتریس زیر به روش ژاکوبی با استفاده ازماتریس دوران، مقدار θ کدام است ؟

$$A=\begin{bmatrix} ۱۰ & ۷ & ۸ & ۷ \\ ۷ & ۵ & ۶ & ۵ \\ ۸ & ۶ & ۱۰ & ۹ \\ ۷ & ۵ & ۹ & ۱۰ \end{bmatrix}$$

الف. $\frac{\pi}{۴}$ ب. $\frac{\pi}{۲}$ ج. صفر د. $\frac{\pi}{۳}$

۲۰. خطای $\frac{y_{i+۱}-۲y_i+y_{i-۱}}{h^۲}$ بعنوان تقریبی از y_i'' کدام است؟

الف. $O(h)$ ب. $O(h^۲)$ ج. $O(h^۳)$ د. $O(h^۴)$

سئوالات تشریحی:

۱. آیا رابطه $\|A\|=\rho(A)$ می تواند یک نرم ماتریس تعریف کند؟ چرا؟

۲. اگر ماتریس A اکیداً قطر غالب باشد نشان دهید که $\|B_j\|_\infty<۱$ (B_j ماتریس ژاکوبی در رابطه $X=BX+c$ است).

۳. ماتریس زیر را به روش دولتیل به حاصلضرب LU تجزیه کنید.

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۴ & -۶ \\ ۱ & ۵ & ۸ \\ ۱ & ۳ & ۲ \end{bmatrix}$$

۴. مقدار ویژه غالب ماتریس زیر را به روش توانی بدست آورید.

بردار اولیه را $(۱,۰,۰)^t$ انتخاب کنید و سه تکرار را انجام دهید.

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۲ \\ ۱۰ & ۳ & ۴ \\ ۳ & ۶ & ۱ \end{bmatrix}$$

۵. معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی زیر را در نظر بگیرید.

$$\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲}+\frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲}=۰$$

$$u(x,۰)=۰ \qquad u(x,۱)=۰ \qquad ۰\leq x\leq ۱$$

$$u(۰,y)=۰ \qquad u(۱,y)=۱ \qquad ۰\leq y\leq ۱$$

با انتخاب $h=k=\frac{۱}{۳}$ معادله دیفرانسیل بالا را حل کنید.