

بسم الله الرحمن الرحيم  
اللهم صل على محمد و آل محمد



[www.egza.tk](http://www.egza.tk)

برای دریافت سوالات دروس دیگر  
می توانید به آدرس زیر مراجعه کنید

استفاده از ماشین حساب مجاز است.

۱. اگر  $Ln X$  دارای توزیع نرمال باشد، آنگاه توزیع  $X$  چه نام دارد؟  
 الف. نرمال      ب. لگ نرمال      ج. گاما      د. کای دو
۲. اگر  $X$  دارای توزیع  $N(1,2)$  باشد،  $Var(X^2 - 2X + 3)$  کدامست؟  
 الف. ۸      ب. ۳      ج. ۲      د. نامشخص
۳. اگر متغیر تصادفی  $Z$  ..... دو متغیر .....  $Y, X$  باشد، آنگاه  $M_Z(t) = M_X(t) \cdot M_Y(t)$  معرف تابع مولد گشتاور  $Z$  است.  
 الف. حاصلضرب - تصادفی مستقل      ب. تفریق - تصادفی  
 ج. مجموع - تصادفی      د. مجموع - تصادفی مستقل
۴. اگر  $X_5, X_6$  دومین و پنجمین متغیرهای تصادفی از نمونه‌ای تصادفی بدون جایگزینی به اندازه  $n$  از جامعه متناهی  $\{X_1, X_2, \dots, X_{10}\}$  با میانگین  $\mu$  استخراج شده باشند، در صورتیکه  $\sum_{i=1}^{10} (X_i - \mu) = 25$  آنگاه  $Cov(X_6, X_5)$  چیست؟  
 الف.  $-\frac{25}{9}$       ب.  $\frac{25}{9}$       ج.  $-\frac{5}{18}$       د.  $\frac{5}{18}$
۵. اگر  $S_1, S_2$  انحرافهای معیار نمونه‌های تصادفی مستقل با اندازه  $n_1 = 61, n_2 = 31$  از جامعه‌های نرمالی با  $\sigma_1^2 = 12, \sigma_2^2 = 18$  باشند، مقدار  $P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} > 1.16\right)$  کدامست؟  $(F_{0.1, 30, 60} = 0.5747)$   
 الف. ۰/۹۵      ب. ۰/۰۵      ج. ۰/۹۹      د. ۰/۰۱
۶. هرگاه  $X_1, X_2, \dots, X_6$  یک نمونه تصادفی از  $N(5, 9)$  و  $Y$  یک متغیر تصادفی مستقل از  $X_i$  و دارای توزیع خی دو با ۴ درجه آزادی باشند، مقدار  $P(\bar{X} - 3.069\sqrt{Y} < 5)$  چیست؟  
 الف. ۰/۹۹۵      ب. ۰/۹۵۹      ج. ۰/۵۹۹      د. ۰/۰۰۵
۷. توزیع برد نمونه‌ای، نمونه تصادفی یکنواخت در فاصله (۰، ۱) چیست؟  
 الف. هندسی      ب. پواسن      ج. گاما      د. بتا

۸. اگر متغیر تصادفی  $X$  دارای توزیع یکنواخت در فاصله  $(0,1)$  باشد، آنگاه  $U = -2 \ln X$  با کدام متغیر زیر هم توزیع است؟

الف.  $-2 \ln(1-X)$  ب.  $\ln(1-X)$  ج.  $\frac{X}{1+X}$  د.  $\frac{1+X}{X}$

۹. گزاره درست کدام است؟

- الف.  $S^2$  برآوردگر نارایب واریانس یک جامعه منتهای و برآوردگر اریب واریانس یک جامعه نامنتهای است.  
 ب.  $S^2$  برآوردگر نارایب واریانس یک جامعه (چه منتهای و چه نامنتهای) است.  
 ج.  $S^2$  برآوردگر نارایب واریانس یک جامعه نامنتهای و برآوردگر اریب واریانس یک جامعه منتهای است.  
 د.  $S^2$  برآوردگر اریب واریانس یک جامعه (چه منتهای و چه نامنتهای) است.

۱۰. اگر  $\hat{\theta}$  برآورد نارایب  $\theta$  و  $Var(\hat{\theta}) = \frac{1}{-nE\left[\frac{\partial^2 \ln f(x)}{\partial^2 \theta}\right]}$  باشد، آنگاه کدام مورد درباره  $\hat{\theta}$  درست است؟  
 الف.  $f(x)$  مقدار چگالی جامعه در  $x$ ،  $\hat{\theta}$  تابعی از  $x$  است.  
 ب.  $\hat{\theta}$  برآوردگر نارایب با کمترین واریانس  $\theta$  است.  
 ج.  $\hat{\theta}$  برآوردگر سازگار  $\theta$  است.  
 د.  $\hat{\theta}$  برآوردگر بسنده  $\theta$  است.

۱۱. اگر  $X_1, X_2, \dots, X_n$  نمونه‌ای تصادفی از توزیع  $N(\mu, \sigma^2)$  باشد، امید ریاضی  $\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$  چیست؟

الف.  $\sigma^2$  ب.  $n\sigma^2$  ج.  $(n-1)\sigma^2$  د.  $(n-2)\sigma^2$

۱۲. کدام مورد زیر درست است؟

الف. اگر  $\hat{\theta}$  برآوردکننده نارایب  $\theta$  باشد، آنگاه  $\hat{\theta}^2$  برآوردگر نارایب  $\theta^2$  است.

ب. اگر  $\hat{\theta}^2$  برآوردگر نارایب  $\theta^2$  باشد، آنگاه  $\hat{\theta}$  برآوردگر نارایب  $\theta$  است.

ج. اگر  $\hat{\theta}$  برآوردگر نارایب  $\theta$  باشد، آنگاه  $\hat{\theta}^2$  برآوردگر اریب  $\theta^2$  است، مگر آنکه  $Var(\hat{\theta}) = 0$ .

د. اگر  $\hat{\theta}$  برآوردگر نارایب  $\theta$  باشد، قضاوتی درباره  $\hat{\theta}^2$  و  $\theta^2$  نمی‌توان کرد.

۱۳. اگر  $Y$  اولین آماره ترتیبی نمونه تصادفی  $n$  تایی از توزیع  $f(x) = e^{-(x-\theta)}, x \geq \theta$  و برآوردگر سازگار  $\theta$  باشد،  $P(|Y - \theta| < c), c \geq 0$  کدام است؟

الف. نامشخص ب. ۱ ج. ۰ د.  $\frac{1}{2}$

۱۴. اگر  $X_1, \dots, X_p, X_n$  یک نمونه تصادفی از  $x \geq \theta_1$ ،  $f(x, \theta_1, \theta_p) = \frac{1}{\theta_p} e^{-\frac{x-\theta_1}{\theta_p}}$  باشد. برآوردکننده توام بسنده  $(\theta_1, \theta_p)$  است؟

- الف.  $(Y_1, Y_n)$       ب.  $(Y_1, \sum_{i=1}^n \ln X_i)$       ج.  $(Y_1, \sum_{i=1}^n X_i)$       د. موجود نیست

۱۵. گزاره نادرست کدامست؟

- الف. سازگاری خاصیت مجانبی یک برآوردکننده درست‌نمایی ماکسیمم نیست.  
 ب. لزومی ندارد که برآوردهای سازگار مجانباً ناریب باشند.  
 ج. برآوردکننده‌های درست‌نمایی ماکسیمم همواره یکتا هستند.  
 د. همواره خود نمونه یک آماره کافی است.

۱۶. اگر  $X_1, \dots, X_p, X_n$  یک نمونه تصادفی از  $x > 0, \theta > 0$ ،  $f(x, \theta) = \frac{1}{\theta} x e^{-\theta x}$  باشد، برآورد گشتاوری  $\theta$  چیست؟

- الف.  $\frac{\pi}{4\bar{X}^2}$       ب.  $\frac{\pi}{4\bar{X}}$       ج.  $\frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\bar{X}}}$       د.  $\frac{\pi}{\bar{X}^2}$

۱۷. اگر  $X_1, \dots, X_p, X_n$  نمونه‌ای تصادفی  $n$  تایی از توزیع گاما با پارامترهای  $\alpha, \beta$  ( $\alpha$  معلوم) باشد، برآورد درست‌نمایی ماکسیمم  $\beta$  کدامست؟

- الف.  $\frac{1}{\bar{X}}$       ب.  $\bar{X}$       ج.  $\frac{\alpha}{\bar{X}}$       د.  $\frac{\bar{X}}{\alpha}$

۱۸. اگر  $(X, cX)$  یک فاصله اطمینان ۲۵ درصدی  $\theta$  باشد، بطوریکه  $f(x) = \frac{1}{\theta} (\theta - x)$  ( $0 < x < \theta$ )، آنگاه مقدار  $c$  کدامست؟

- الف.  $\frac{3}{2}$       ب.  $\frac{1}{2}$       ج. ۳      د. ۲

۱۹. هرگاه  $X$  متغیری تصادفی، دارای توزیع گاما با پارامترهای معلوم  $\alpha, \beta$  باشد، آنگاه توزیع  $\frac{1}{\beta} X$  همواره چیست؟

- الف. هندسی      ب. نرمال      ج.  $\chi^2_{(1)}$       د.  $\chi^2_{(r\alpha)}$

۲۰. اگر  $X_1, \dots, X_n$  یک نمونه تصادفی از توزیع نمایی با پارامتر  $\theta$ ،  $\sum_{i=1}^n X_i \geq c$  ناحیه رد فرض  $H_0: \theta = \theta_0$  در

مقابل  $H_1: \theta = \theta_1 > \theta_0$  در سطح  $\alpha$  باشند، آنگاه مقدار  $c$  چیست؟

- الف.  $\theta_0 \chi_{n, \alpha}^2$       ب.  $\frac{\theta_0}{\mu} \chi_{n, \alpha}^2$       ج.  $\frac{\theta_0}{\mu} \chi_{rn, \alpha}^2$       د. نمی‌توان بدست آورد.

۲۱. اگر  $\pi(\theta)$  تابع توان یک آزمون فرض آماری  $H_0$  در برابر فرض مقابل  $H_1$  باشد، آنگاه بازای مقادیر  $\theta$  تحت اختیار  $H_1$  تابع توان برابر است با:

- الف.  $\alpha(\theta)$       ب.  $\beta(\theta)$       ج.  $1 - \beta(\theta)$       د.  $1 - \alpha(\theta)$

۲۲. هرگاه  $X_1, X_2, \dots, X_n$  نمونه‌ای تصادفی از توزیع  $N(\mu, \sigma^2)$ ، آماره آزمون نسبت درست‌نمایی تعمیم یافته فرض  $H_0: \mu = \mu_0, \sigma^2 = \sigma_0^2$  در مقابل  $H_1: \mu \neq \mu_0, \sigma^2 \neq \sigma_0^2$  باشد، در صورت بزرگ بودن  $n$  توزیع تقریبی  $2Ln \Lambda$  چیست؟

- الف.  $\chi_{(1)}^2$       ب.  $\chi_{(2)}^2$       ج. نرمال      د. نامشخص

۲۳. هرگاه تابع احتمال  $X$  به یکی از صورتهای زیر باشد، آماره آزمون نسبت درست‌نمایی تعمیم یافته فرض  $H_0: \theta = \theta_0$  در مقابل  $H_1: \theta \neq \theta_0$  کدامست؟

$\theta$	$X$	$X_1$	$X_2$	$X_3$
$\theta_0$		۰/۰۲	۰/۰۳	۰/۹۵
$\theta_1$		۰/۰۴	۰/۰۵	۰/۹۹
$\theta_0$		۰/۱	۰/۱	۰/۸

$$\Lambda(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x = x_1 \\ \frac{3}{5}, & x = x_2, x_3 \end{cases} \quad \text{ب.}$$

$$\Lambda(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x = x_0 \\ \frac{3}{5}, & x = x_2 \\ \frac{1}{96}, & x = x_3 \end{cases} \quad \text{الف.}$$

د. نمی‌توان بدست آورد.

$$\Lambda(x) = \begin{cases} \frac{3}{5}, & x = x_1 \\ \frac{1}{2}, & x = x_2, x_3 \end{cases} \quad \text{ج.}$$

۲۴. در سؤال شماره ۲۳ اگر ناحیه رد فرض  $H_0$  در سطح ۵ درصد از رابطه  $\Lambda(X) \leq K$  بدست آید، آنگاه  $K$  چیست؟

الف.  $K = \frac{1}{5}$       ب.  $\frac{3}{5} \leq K < 0.96$       ج.  $K = \frac{2}{3}$       د.  $\frac{3}{5} \leq K \leq 0.96$

۲۵. متناظر با مقداری مشاهده شده از یک آماره آزمون به پایین‌ترین سطح معنی‌داری که می‌توان فرض صفر را در آن رد کرد چه نام دارد؟

الف. آماره آزمون      ب. تابع توان      ج. احتمال خطای نوع اول      د. P - مقدار

«سؤالات تشریحی»

۱. اگر چگالی توأم  $Y, X$  بصورت زیر باشد، چگالی احتمال  $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$  را به روشهای تابع توزیع و تبدیل متغیر بیابید.

$$F(x, y) = \begin{cases} 4xye^{-(x^2+y^2)} & x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

۲. اگر  $X_1, \dots, X_n$  نمونه‌ای تصادفی از توزیع  $N(\mu, \sigma^2)$  باشد، توزیع  $\bar{X}$  را تعیین کنید.

۳. اگر  $X_1, \dots, X_n$  یک نمونه تصادفی از توزیع  $U(0, \theta)$  باشد،  $y = \max(X_1, \dots, X_n)$  برآورد درست‌نمایی  $\theta$  را یافته و ثابت کنید که آماره سازگار  $\theta$  نیز است.

۴. لم نیمین پیرسن را بیان و آنرا اثبات کنید.

۵. هرگاه  $X_1, \dots, X_n$  یک نمونه تصادفی از توزیع  $N(\mu, \sigma^2)$  که  $\mu, \sigma^2$  نامعلومند باشند، ثابت کنید که آماره

آزمون نسبت درست‌نمایی تعمیم یافته فرض  $H_0: \mu = \mu_0$  در مقابل  $H_1: \mu \neq \mu_0$  بصورت  $\lambda = \left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}$  که در

$$\text{آن } t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \text{ می‌باشد.}$$

۱. احتمال اینکه ۵ نفر اطراف یک میز بنشینند به طوریکه دو نفر خاص پهلوئی هم قرار بگیرند چقدر است؟

- الف.  $\frac{1}{4!}$       ب.  $\frac{1}{5}$       ج.  $\frac{1}{4}$       د.  $\frac{1}{2}$

۲. ظرفی شامل ۵ مهره سفید و ۷ مهره سیاه است. یک مهره به تصادف انتخاب و کنار می‌گذاریم و سپس مهره دیگری بیرون می‌آوریم و مشاهده می‌کنیم که سفید است. احتمال اینکه مهره اول نیز سفید باشد چقدر است؟

- الف.  $\frac{4}{11}$       ب.  $\frac{5}{12}$       ج.  $\frac{7}{12}$       د.  $\frac{7}{11}$

۳. اگر میانگین ۶ عدد برابر  $\bar{x} = 4$  باشد آنگاه با داشتن رابطه  $\bar{x} = 2 - 3\bar{y}$  میانگین  $\bar{y}$  چقدر است؟

- الف. ۲      ب.  $\frac{2}{3}$       ج.  $\frac{1}{2}$       د. ۴

۴. میانه داده‌های ۹، ۷، ۵، ۲، ۳ چیست؟

- الف. ۱      ب. ۴      ج.  $\frac{2}{5}$       د. ۳

۵. مقدار  $\sum_{i=0}^{10} \binom{10}{i}^2$  برابر است با:

- الف.  $10^2$       ب.  $\binom{20}{10}$       ج.  $10^2$       د.  $\binom{100}{10}$

۶. فرض کنید  $P(A) = \frac{1}{2}$  و  $P(B) = \frac{1}{3}$  و  $A$  و  $B$  مستقل باشند،  $P(A' \cap B')$  کدام است؟

- الف.  $\frac{1}{6}$       ب.  $\frac{1}{2}$       ج.  $\frac{2}{3}$       د.  $\frac{1}{3}$

۷. فرض کنید فضای نمونه‌ای  $S$  دارای افزایش‌های  $B_1, B_2, \dots, B_p$  باشد و  $A$  پیشامدی از  $S$ . کدام رابطه زیر همواره برابر صفر نیست؟

- الف.  $P(A \cap B_1 | B_p)$       ب.  $P(A | B_1 \cup B_p)$   
ج.  $P(B_1 | B_p)$       د.  $P(B_1 \cap B_p | A)$

۸.  $P(A) = \frac{3}{5}$  و  $P(B) = \frac{5}{7}$  و  $P(A \cap B) = \frac{1}{7}$  آنگاه  $P(B | A \cup B)$  برابر است با:

- الف.  $\frac{5}{6}$       ب.  $\frac{5}{7}$       ج.  $\frac{6}{7}$       د.  $\frac{3}{5}$

۹. تابع چگالی متغیر تصادفی  $X$  به صورت زیر تعریف شده است:

$x$	۰	۱	۲	۳
$f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$a, b$  چه مقداری باید باشند تا  $aX + b$  دارای امید ریاضی صفر و واریانس یک باشند.

الف.  $a = 1, b = \frac{3}{2}$     ب.  $a = \frac{3}{4}, b = \frac{3}{2}$     ج.  $a = \frac{2}{3}, b = \frac{-3}{\sqrt{3}}$     د.  $a = \frac{2\sqrt{3}}{3}, b = -\sqrt{3}$

۱۰. در سؤال ۹ داریم  $F(1) = \frac{4}{8}$  یعنی:

- الف. میانه برابر یک است.    ب. میانگین از یک بزرگتر است.  
ج. میانه یکتا است.    د. میانگین برابر یک است.

۱۱. مقدار  $C$  را به نحوی تعیین کنید تا تابع  $f(x) = c \frac{M^x}{x!}$   $x = 0, 1, 2, \dots$  یک تابع چگالی باشد.

الف.  $\binom{M}{x}$     ب.  $e^{-M}$     ج.  $e^M$     د.  $\binom{x}{M}$

۱۲. اگر  $X$  دارای توزیع نرمال با میانگین  $\mu$  و واریانس  $\sigma^2$  باشد آنگاه  $\text{Var}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2$  برابر است با:

- الف. ۲    ب. ۱    ج. ۴    د. ۳

۱۳. اگر  $X \sim B(n, p)$  و  $Y \sim B(n, p)$  و مستقل آنگاه  $2n - (X + Y)$  دارای چه توزیعی است؟  
الف.  $B(2n, p)$     ب.  $B(n, 2p)$     ج.  $B(2n, 1-p)$     د.  $B(n, 2(1-p))$

۱۴. اگر  $X$  دارای توزیع پواسن با پارامتر  $M$  باشد  $E(X(X-1))$  برابر است با:

الف.  $2M$     ب.  $M + M^2$     ج.  $M$     د.  $M^2$

۱۵. برای هر متغیر تصادفی در فاصله  $(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$  حداقل احتمال رخ آن چقدر است؟

الف.  $\frac{1}{4}$     ب.  $\frac{3}{4}$     ج.  $\frac{8}{9}$     د.  $\frac{1}{9}$

۱۶. اگر تابع مولد متغیری تصادفی به صورت  $M_X(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^t$  باشد کدامیک توزیع متغیر تصادفی است؟

- الف. پواسن با پارامتر ۲    ب. دو جمله‌ای با  $n = 2, p = \frac{1}{2}$     ج. برنولی    د. هندسی



۱۷. اگر دو متغیر تصادفی دارای توابع مولد گشتاورهای یکسان باشند در کدام گزینه نیز یکسانند؟  
الف. توزیع ب. میانگین ج. واریانسها د. گشتاورها

۱۸. اگر  $E(X) = 3$  باشد آنگاه  $E(X^2)$  در کدام رابطه صدق می‌کند؟

الف.  $E(X^2) \geq 9$  ب.  $E(X^2) \geq 3$  ج.  $E(X^2) \leq 9$  د.  $E(X^2) \leq 3$

۱۹.  $X, Y$  دارای چگالی توأم  $f(x, y) = \begin{cases} 2 & 0 < x < y < 1 \\ 0 & \text{سایر جاهای دیگر} \end{cases}$  است، مطلوبست:  $p(X < \frac{1}{2})$

الف.  $\frac{7}{8}$  ب.  $\frac{1}{8}$  ج.  $\frac{1}{4}$  د.  $\frac{3}{4}$

۲۰. در سؤال ۱۹،  $p(X < \frac{1}{2} | y < \frac{1}{2})$  برابر است با:

الف. ۱ ب.  $\frac{1}{8}$  ج.  $\frac{7}{8}$  د.  $\frac{1}{4}$

### سؤالات تشریحی

۱. اگر  $X \sim B(n, p)$  (دو جمله‌ای با پارامتر  $(n, p)$ ) ثابت کنید تابع مولد گشتاورهای  $X$  برابر است:

$$M_X(t) = (q + pe^t)^n$$

۲. یک فروشنده آثار هنری محموله‌ای شامل پنج تابلوی نقاشی از خارج کشور دریافت می‌کند، احتمال اینکه ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ یا ۵ تابلو تقلبی باشند به ترتیب ۰/۷۶، ۰/۰۹، ۰/۰۲، ۰/۰۱، ۰/۰۲، ۰/۰۵، ۰/۱۰ است. فروشنده تصمیم می‌گیرد یکی از پنج تابلوی نقاشی را به تصادف انتخاب کند و برای تأیید اصالت بفرستد. اگر دریابد که این تابلو تقلبی است، احتمالی که او به تقلبی بودن همگی چهار تابلوی دیگر نسبت خواهد داد چقدر است؟

۳. توزیع توأم دو متغیر تصادفی  $X, Y$  به صورت زیر است.

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 - e^{-x} - e^{-y} + e^{-x-y} & x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{سایر جاهای دیگر} \end{cases}$$

الف. آیا  $X, Y$  مستقلند؟

ب. تابع چگالی توأم دو متغیر تصادفی را بیابید.

۴. ثابت کنید در توزیع دو جمله‌ای  $B(n, p)$  هرگاه  $n \rightarrow \infty, \theta \rightarrow 0, np \rightarrow \lambda$  آنگاه توزیع دو جمله‌ای به توزیع پواسن با پارامتر  $\lambda$  میل خواهد کرد.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{3}(x + 2y) & \begin{matrix} 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \end{matrix} \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases} \quad \text{۵. چگالی توأم } Y, X \text{ بصورت زیر است:}$$

اولاً: چگالی شرطی  $X$  به شرط  $Y = y$  را بیابید.

ثانیاً:  $P(X < 1 | y = \frac{1}{2})$  را محاسبه کنید.

\* استفاده از ماشین حساب مجاز است.

۱. اگر  $X$  دارای توزیع پواسن با پارامتر  $\lambda = 5$  باشد،  $E(X(X-1))$  برابر است با:
- الف. ۱۰      ب. ۳۰      ج. ۲۵      د. ۵
۲. برای هر متغیر تصادفی از توزیعی متقارن حول میانگین، حداقل احتمال رخداد آن در فاصله  $(\mu - 2\sigma, \mu + 3\sigma)$  عبارت است از:

- الف.  $\frac{59}{72}$       ب.  $\frac{54}{72}$
- ج.  $\frac{5}{72}$       د.  $\frac{32}{72}$

۳. اگر  $X \sim (n, p)$  و  $Y \sim B(n, p)$  و مستقل باشند آنگاه  $(X+Y)$  دارای توزیع ..... است.

- الف.  $B(2n, p)$       ب.  $B(2n, 1-p)$
- ج.  $B(n, 2p)$       د.  $B(n, 2(1-p))$

۴. احتمال آنکه شش نفر اطراف یک میز بنشینند به طوری که سه نفر خاص پهلوی هم قرار گیرند چقدر است؟

- الف.  $\frac{1}{5!}$       ب.  $\frac{1}{5!}$       ج.  $\frac{1}{10}$       د.  $\frac{1}{4!}$

۵. اگر  $P(A) = 0.2$ ،  $P(B) = 0.4$ ،  $P(A \cap B) = 0.1$ ، آنگاه  $P(A|A \cup B)$  برابر است با:

- الف.  $\frac{4}{5}$       ب.  $\frac{2}{3}$       ج.  $\frac{1}{3}$       د.  $\frac{2}{5}$

۶. اگر میانگین یک نمونه به حجم  $n_1 = 6$  برابر  $\bar{X} = 4$  و میانگین نمونه‌ای به حجم  $n_2$  برابر  $\bar{Y} = 10$  باشد وقتی میانگین

ادغام شده برابر 6 باشد  $n_2$  برابر است با:

- الف. ۳      ب. ۴
- ج. ۵      د. ۶

۷. فرض کنید  $P(A) = \frac{1}{2}$ ،  $P(B) = \frac{1}{3}$  و وقتی  $A, B$  مستقل باشند، احتمال  $P(A' \cup B')$  برابر است با:

- الف.  $\frac{1}{6}$       ب.  $\frac{5}{6}$       ج.  $\frac{2}{3}$       د.  $\frac{1}{3}$

۸. دو متغیر تصادفی دارای تابع مولد گشتاورهای برابر هستند اگر و تنها اگر دارای ..... برابر باشند.

- الف. گشتاورها      ب. واریانسها      ج. میانگین      د. توزیع

۹. سکه سالمی را ۴ بار پرتاب می‌کنیم فرض کنید  $X$  تعداد شیرها را نشان دهد. اگر  $F_{(X)}$  تابع توزیع  $X$  باشد  $F(2/5)$

برابر است با:

- الف.  $\frac{11}{16}$       ب.  $\frac{5}{16}$       ج.  $\frac{15}{16}$       د. ۱

۱۰. اگر تابع چگالی احتمال توام دو متغیر تصادفی  $X, Y$  به صورت

$$f(x, y) = \begin{cases} kx(x-y) & -x < y < x \quad 0 < x < 1 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

مقدار  $k$  برابر است با:

- الف. ۳      ب. ۲-      ج.  $\frac{۳}{۲}$       د. ۲

۱۱. سه مرد کلاه‌های خود را به وسط اتاق پرتاب می‌کنند. پس از مخلوط کردن کلاه‌ها هر یک به تصادف یک کلاه برمی‌دارند. احتمال آنکه هیچ مردی کلاه خود را برنندارد برابر است با:

- الف.  $\frac{1}{۳}$       ب.  $\frac{1}{۶}$       ج.  $\frac{1}{۲}$       د.  $\frac{1}{۱۲}$

۱۲. در بسط  $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^{10}$  ضریب  $x_1^4 x_2^3 x_3^2 x_4$  برابر است با:

- الف. ۵۰۴۰۰      ب. ۱۲۶۰۰      ج. ۳۵۲۰۰      د. ۱۸۴۰۰

۱۳. یک سکه سالم را لاقط چندبار پرتاب کنیم تا با احتمال بیش از  $\frac{۰}{۹۹}$  لاقط یک بار شیر بیاید؟

- الف. ۶      ب. ۱۰      ج. ۷      د. ۱۲

۱۴. تابع چگالی احتمال توام  $X$  و  $Y$  به صورت

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{۳}{۵}x(x+y) & 0 < x < 1 \quad 0 < y < ۲ \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

مقدار  $P(0 < x < \frac{1}{۲}, 1 < y < ۲)$  برابر است با:

- الف.  $\frac{۱۵}{۸۰}$       ب.  $\frac{۱۱}{۸۰}$       ج.  $\frac{۷}{۴۰}$       د.  $\frac{1}{۴}$

۱۵. فرض کنید تابع چگالی احتمال توام  $X$  و  $Y$  به صورت

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{۲}{۳}(x+۲y) & 0 < y < 1 \quad 0 < x < 1 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

مقدار  $E[X | Y = \frac{1}{۲}]$  (میانگین شرطی  $X$  به شرط  $Y = \frac{1}{۲}$ ) برابر است با:

- الف.  $\frac{۵}{۹}$       ب.  $\frac{۶}{۹}$       ج.  $\frac{۱۶}{۹}$       د.  $\frac{۱۱}{۹}$

سؤالات تشریحی:

۱. ثابت کنید  $\sum_{r=0}^n r \binom{n}{r} = n2^{n-1}$

۲. اگر تابع توزیع توأم دو متغیر تصادفی  $X$  و  $Y$  به صورت

$$F(x, y) = (1 - e^{-x})(1 - e^{-y}) \quad , \quad x > 0, \quad y > 0$$

مقدار  $P(3 < y < 4 \mid 3 < x < 5)$  را بدست آورید.

۳. فرض کنید  $X$  و  $Y$  دارای توزیع احتمال توأم زیر باشند.

$x$	۰	۱	۲
$y$	-۱	۰	۱
-۱	$\frac{1}{9}$	۰	$\frac{1}{9}$
۰	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	۰
۱	۰	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$

مقدار  $\text{var}(X \mid Y = 0)$  را حساب کنید.

۴. در جعبه  $I$ ، ۲۴ لامپ وجود دارد که ۴ تای آنها معیوب‌اند. در جعبه  $II$  نیز ۲۴ لامپ وجود دارد که ۶ تای آنها معیوب‌اند. یکی از دو جعبه را به تصادف انتخاب و ۲ لامپ از آن خارج می‌کنیم. اگر هر دو لامپ استخراج شده معیوب باشند، مطلوب است احتمال اینکه لامپها از جعبه  $I$  استخراج شده باشند.

۵. اگر  $F(x, y)$  مقدار تابع توزیع توأم دو متغیر تصادفی از نوع پیوسته  $x, y$  در  $(x, y)$  باشد ثابت کنید:

$$P(a < X \leq b, \quad c < y \leq d) = F(b, d) - F(b, c) - F(a, d) + F(a, c)$$